

講義ノート 金融ネットワークのトポロジーと安定性

増山 幸一

明治学院大学経済学部

2015年3月: in progress version

1 序

現代の金融システムでは、非常に多数の金融機関（銀行、証券会社、投資ファンドなどの金融仲介機関）は、様々な金融商品にかかわる債権や債務から構成される資産と負債のバランスシートを介して、複雑な連結構造のネットワークを形成している。CDS や CDO などの高度な金融派生商品の登場は各金融機関のバランスシート間の連結構造をより複雑化している。このような現代金融システムにおけるシステムック・リスクやデフォルトの連鎖現象を理解するためには、金融システムを複雑なネットワークとして理解し、このネットワークに加わった外的なショックが金融ネットワーク上で連鎖・拡大する過程を定式化することが重要である。Haldane(2009)、Haldane and May(2011) および May, Levin and Sugihara(2008) は金融システムの不安定性と安定性確保のための政策立案にはネットワーク理論を応用することが有効であると主張している。

生態学、動物学、あるいは感染病学などの領域では、初期に数人の感染から始まる伝染病がネットワーク上で連結したノード間の人的接触を介して、社会の多数の人間に感染・拡大する感染過程が研究対象とされてきた。これらはネットワークに加わった外的ショックがネットワーク全体に波及する過程のモデルとして取り上げられ、多数の研究者によって様々な定式化が行われてきた。こうしたネットワーク上で起きる現象は、複雑なネットワーク・システムにおける臨界現象 (critical phenomena)、相転移現象 (phase transitions) と呼ばれ、そこで活用された理論は統計力学における分析手法である浸透理論 (percolation theory) である*1。Callaway, et al.(2000)、Newman, et al.(2001)、Newman(2002)、および Watts(2002) は感染過程を確率母関数の理論を応用して、相転移が起こるときの閾値関数の計算方法を提案した。確率母関数の理論は社会的ネットワークでのイノベーションの拡散過程の分析でも有効であり、金融ネットワーク上でのシステムック・リスクの分析においても有効な定式化を提供すると思われる*2。

この講義ノートは、金融システムをネットワークとして理解するとき得られる特徴を理解し、システムック・リスクやデフォルト連鎖が伝搬する波及メカニズムおよび金融システムの安定性問題を理解するために必要な分析概念を提供することを目的とする。ネットワーク理論の初歩的な概念を始めから説明する余裕はないので、ネットワーク理論の初歩的な概念の知識が読者はネットワーク論の初歩的なテキストあるいは拙著「講義ノート ネットワーク理論入門」を参照して下さい。

*1 浸透理論および感染モデルなどを解説した入門テキストは、Newman(2010) である。

*2 López-Pintado(2006,2008) は母関数アプローチを用いてイノベーションの拡散過程を分析している。この計算方法については、Newman(2010) あるいは増山 (2014) を参照のこと。

2 金融ネットワークのトポロジー

2.1 金融ネットワークの表現方法

金融ネットワークは銀行、証券会社や短資会社などの金融機関をノードとして形成されるネットワークであるが、リンクの形成は方向付けられている。資金が銀行 i から銀行 j に貸し付けられる場合、リンク接続は i から j に向かう方向性を持つ。この取引関係をリンク (i, j) で表現する。リンク (i, j) は銀行 i から出て行くリンク、アウト次数 (out-going degree) の一つとなる。他方、銀行 j から見れば、流入してくるリンク、イン次数 (in-coming degree) を形成する。リンクの接続方向は資金の流れと同じ方向とする。金融ネットワークの全ノード数を n とし、ノードの集合を $N = \{1, 2, \dots, n\}$ と表記する。リンク接続はこの集合の中から二つのノードを取り出すときの組合せの数だけ存在し得る。リンク接続の集合を $\mathcal{E}(N)$ と表記する。

金融機関の取引は取引回数の大小や取引額の大小が重要となる。金融機関 i (lender) から金融機関 j (borrower) への貸出し (loans) があるとき、ノード i からノード j へのリンク接続に取引回数の大小や取引額の大小に応じた重み $w_{ji} = w(j, i)$ を付ける。 W を $w_{ij} = w(i, j)$ を (i, j) 要素とするネットワークのリンク接続に関する重み行列とする。ネットワークのリンク接続の関係を理解するときに、便利な表現方法として隣接行列 (adjacency matrix) を使用する。隣接行列は以下のように定義される。ノード j からノード i に資金が貸付けられている関係があれば、リンク接続を $a_{ij} = 1$ と表現する。つまり、

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & |w_{ij}| > 0 \text{ であるとき} \\ 0 & \text{それ以外の場合} \end{cases} \quad (1)$$

ij 要素を $\{a_{ij}\}$ とする行列 A を隣接行列という。

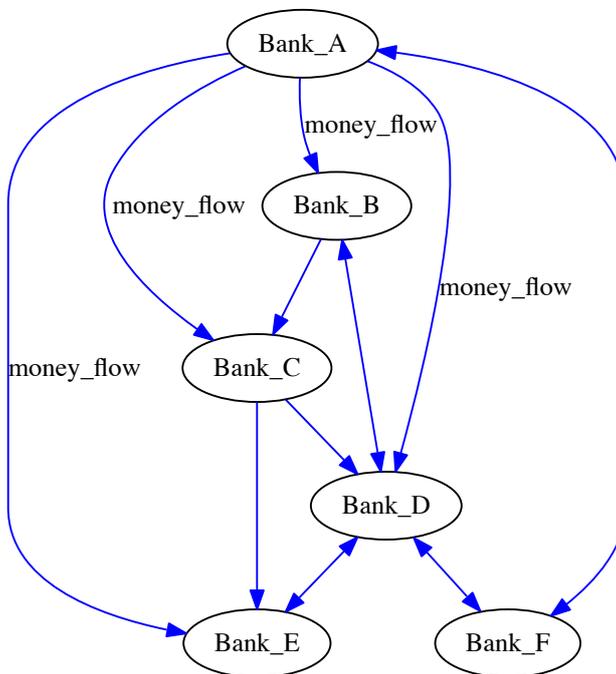


Fig.2.1 有向グラフ

ノード i に資金を提供するノードの集合 (predecessors) を \mathcal{P}_i 、ノード i が資金を提供しているノードの集合 (successors) を \mathcal{S}_i と表記する。

$$\mathcal{P}_i = \{j : (i, j) \in \mathcal{E}(N)\}, \mathcal{S}_i = \{j : (j, i) \in \mathcal{E}(N)\}$$

金融機関 i の貸出先と借入先の集合 $\mathcal{N}_i = \mathcal{P}_i \cup \mathcal{S}_i$ はノード i の隣人ノードの集合となる。各ノード i の (借入先) イン次数を k_i^{in} とすると、

$$k_i^{in} = |\mathcal{P}_i| = \sum_j a_{ji}$$

であり、(貸出先) アウト次数 k_i^{out} は

$$k_i^{out} = |\mathcal{S}_i| = \sum_j a_{ij}$$

となっている。ここで、 $|A|$ は集合 A の要素数を表す。一つのイン次数は必ず一つのアウト次数を伴うので、ネットワーク全体で、イン次数の総数とアウト次数の総数は一致する。

$$\sum_{i=1}^n k_i^{in} = \sum_{i=1}^n k_i^{out} = m$$

が成立つ。ここで、 m はネットワークにおける総リンク数である。ノード当たりのリンク数は平均次数であるので、 $\langle k \rangle = m/n$ となる。ここで、 $\langle k \rangle$ は平均次数である。

有向グラフでは、world wide web に代表されるように、通常、ネットワーク全体を覆う巨大コンポーネントは存在しない。ネットワーク全体はいくつかのコンポーネントに分裂している。よく知られている通り、world wide web は4つのコンポーネントあるいはクラスターに分裂している*3。第1のクラスターは中央大陸であり、インターネットの全ウェブページの約28%を占め、Google や Yahoo などの巨大サイトが住む地域である。この大陸では、どの二つのドキュメントも互いを連結するパスが存在している。つまり、この大陸に住むどの二つのノードをつなぐパスもこの大陸内に含まれている。この中央大陸を GSCC (giant strongly connected component) という。

第2、第3のクラスターは IN 大陸 (GIN, giant in-component) と OUT 大陸 (GOUT, giant out-component) と呼ばれている。GIN は中央大陸 GSCC に接続先を (直接的、間接的に) もつノードからなるコンポーネントで、GSCC から GIN に接続するリンクが存在しないコンポーネントである。つまり、GIN のノードからは GSCC のノードへ行くことはできるが、GSCC からは GIN のノードに行くことはできない。他方、GSCC のノードからは GOUT のノードにたどり着けるが、一旦 GOUT に行くと GSCC には戻れない。GOUT は GSCC からの一方通行のみ可能なノードからなるコンポーネントである。インターネット WWW では、GOUT と GIN クラスターは全ウェブページのそれぞれ約21%を占めることが知られている。

残りのクラスターは、筒、半島と島国からなる。これらをまとめて、tendrils という。筒 (tube) は GIN のノードから出て、GOUT のノードに行くパスを持つコンポーネントで、いわば、トンネルのような形をしている。半島は2種類あり、GIN から出て行く経路を持つコンポーネントと、GOUT に接続するリンクを持つコンポーネントである。いずれの半島のノードからも中央大陸の GSCC には行けない。島は字句通り、外の大陸から行く、返ることができない非連結のコンポーネントである。これは DCs (disconnected components)

*3 以下の分類についての説明は、Broder et al.(2000) および Dorogovtsez(2001) を参照して下さい。

と呼ばれている。リンク接続の方向性を無視して、無方向性グラフとして理解するときに、互いに到達可能なノードからなるコンポーネントをまとめて、GWCC(giant weakly connected componetns)と呼んでいる。

ネットワークの全ノードを以上の分裂したコンポーネントごとに分けて、共通部分を持たない集合 G_j に分けることができる。これらは $N = \cup_j G_j$ を満たす。このとき、 $h \neq k$ ならば、

$$\{(i, j), (j, i) : i \in G_h \wedge j \in G_k\} = \emptyset$$

となっている。

以上のネットワークに関する分類を図示すると以下のように描ける。金融ネットワークのアーキテクチャーも類似の構造をしている。

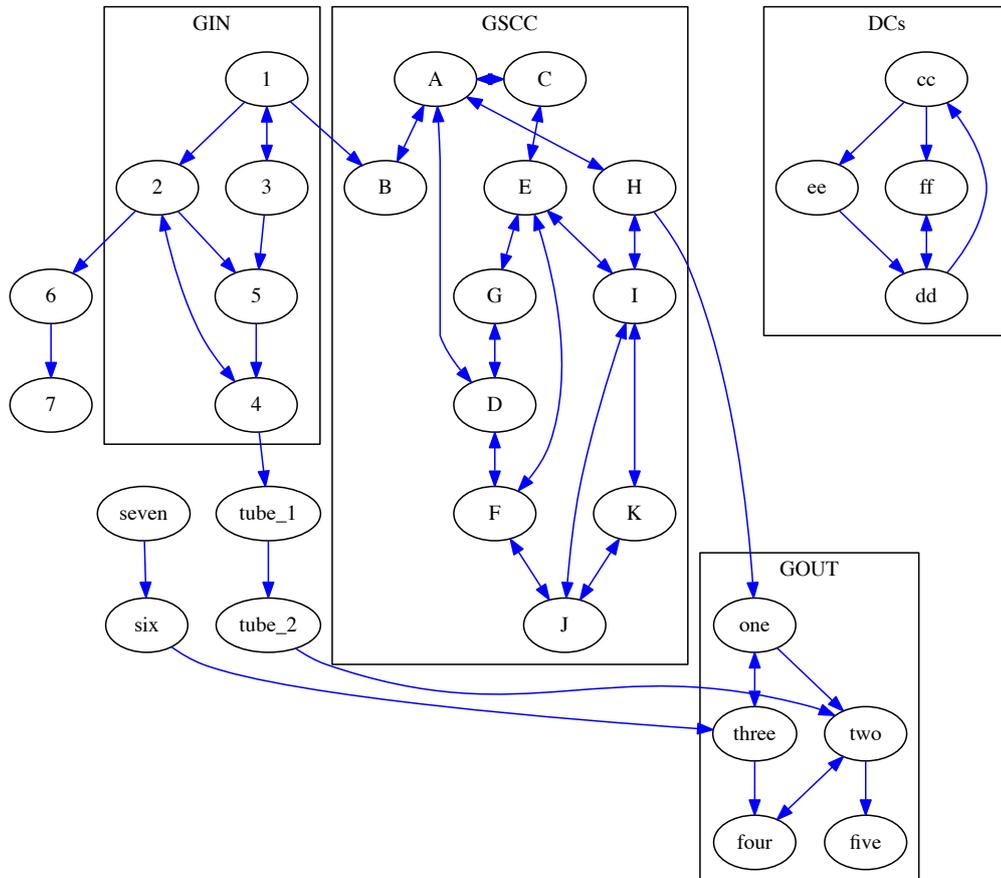


Fig.2.2 金融ネットワークのクラスター群

次数分布はネットワークの特徴を理解する上で非常に重要な役割を果たす。古典的なランダムネットワーク理論では、ポアソン分布が典型的な次数分布として利用されてきた。Broder et al(2000)の研究に代表される通り、インターネット上でのウェブ間連結では、冪乗則分布が見られる。金融ネットワークでも、稲岡 他(2003)やSoramäki et al.(2006)で指摘された通り、次数分布が冪乗則分布に従う事実が観察されている。冪

乗則分布は k を次数とすると、次数 k を持つノードの確率分布が

$$p_k = Ck^{-\alpha}, \alpha > 0$$

と与えられる。ただし、 C は定数である。冪乗則分布はポアソン分布や正規分布に比べて、右側方向が大きく歪んだ (right-skewed) 分布をしている。この式の両辺の対数を取ると、

$$\ln p_k = \ln C - \alpha \ln k$$

が得られる。この式から、両軸を対数値とする平面上で、冪乗則のグラフは右下がりの直線となることが分かる。傾きの大きさは α である。以下の図は、冪乗則分布を発生するネットワークの代表例である world wide web 間のハイパーリンクのネットワークの次数分布を描いたものである。横軸及び縦軸は対数値で取られている。

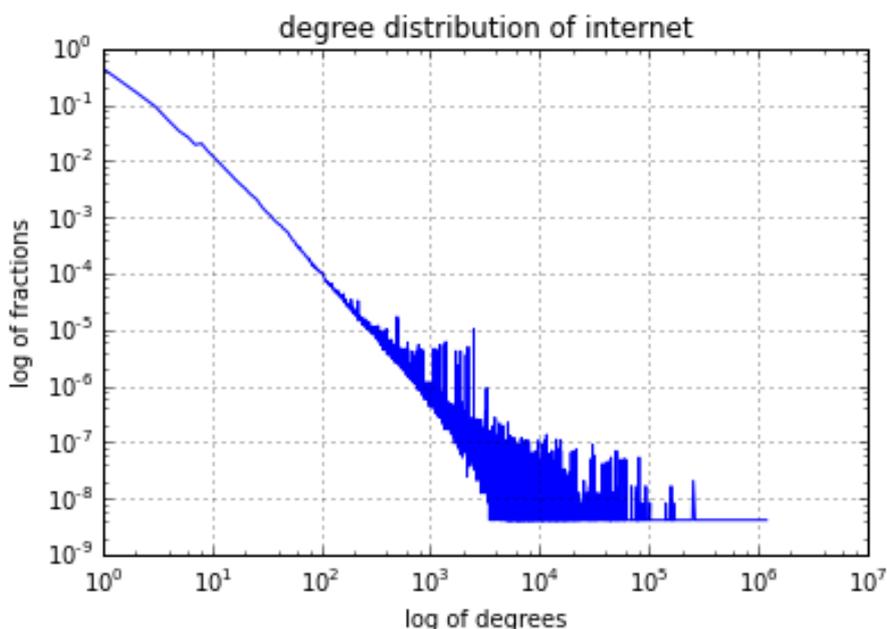


Fig.2.3 冪乗則分布の例 (world wide web hyperlinks の次数分布)

しかし、実際のデータを対数軸のグラフに描き、冪乗則分布に当てはまるか否かを検証するとき、いくつかの問題に直面する。次数が非常に大きなテールの領域では、ヒストグラムを描くためのデータ数は非常に少なくなる。つまり、データ数が非常に少ないならば、ノイズ・データの方が大きくなる可能性が生じる。上の図でもこの現象が見られる。このことの故に、描かれた分布が直線に従わない可能性が出てくる。この問題を避けるために取られる方法は、累積分布を使用することである。以下のような逆累積分布関数 (the complement of the cumulative distribution function)

$$P_k = \sum_{r=k}^{\infty} p_r$$

を定義する。 P_k は k 以上の次数を持つノードが占める比率である。つまり、任意に選ばれたノードが次数 k 以上を持つ確率となっている。

次数分布がテールの領域で冪乗則に従っていると。言い換えると、ある大きな次数 k_{min} よりも右側で冪乗則が成立つとすると、 $k \geq k_{min}$ に対して

$$P_k = C \sum_{r=k}^{\infty} r^{-\alpha}$$

が成立する。 k を実数として取り扱うと、

$$P_k \approx \int_k^{\infty} r^{-\alpha} dr = \frac{C}{\alpha-1} k^{-(\alpha-1)}$$

なる関係式が得られる。従って、逆累積分布は指数を $-(\alpha-1)$ とする冪乗則分布に従う。この逆累積分布関数の概念を活用すれば、上記のデータ数不足に伴うエラー問題は解決する*4。多くの実証研究ではこのアプローチが採用されている。下の図は上の world wide web 間のハイパーリンクのネットワークの次数分布を逆累積分布形式で描いたグラフである。

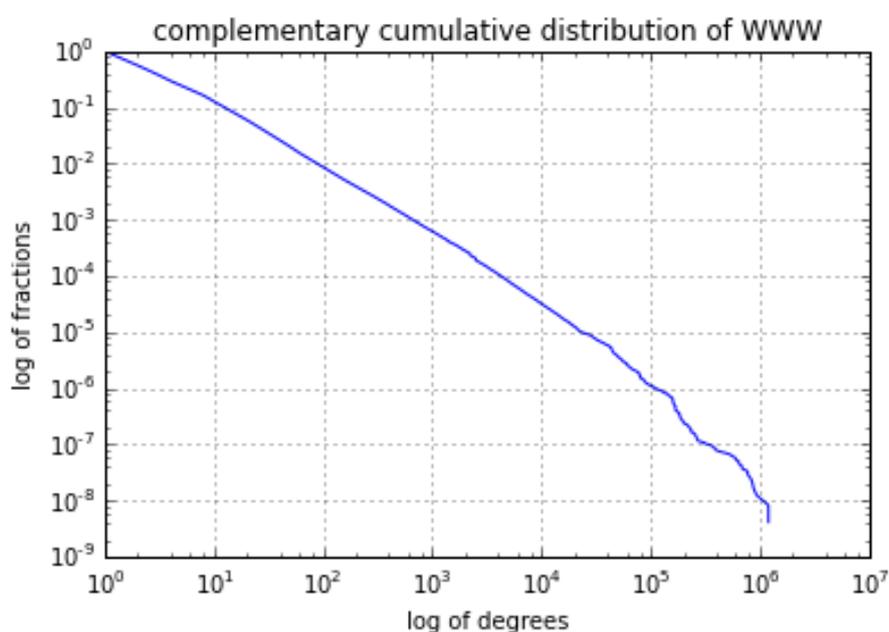


Fig.2.4 累積分布形式での次数分布の例 (world wide web hyperlinks の次数分布)

この例では、累積次数分布のグラフが必ずしも直線となっていないので、単純な回帰分析では、冪乗則分布で説明できるか否かを判断することは難しい。world wide web における hyperlinks の次数分布に関する詳細な研究については、Broder et al.(2000) を参照して下さい。ここで用いたデータは Broder 達の論文からのものである。

*4 この場合でも、別の新たな問題点が存在するが、この件については省略する。Newman(2010) を参照のこと。

3 金融ネットワークのシステミック・リスク

3.1 金融ネットワークのシステミック・リスクに関する既存研究

金融システムにおける感染メカニズムの一つは、初期デフォルト銀行の損失がインターバンク市場を介してインターバンク債権を直接的に保有する銀行群の損失に連鎖し、これらの損失がインターバンク市場での債権・債務上で連結している銀行群の更なるデフォルトを引き起こす波及効果である。また、損失を受けた銀行の流動性不足が資産の売却行為を動機づけるので、当該銀行の所有する資産の価値が下落し、この価値下落が更なる銀行群の損失を引き起こすドミノ効果も働く。こうして、インターバンク市場での債権と債務の直接的ネットワーク連結に起因するデフォルトの連鎖過程は、流動性退蔵と fire-sale 行動に起因するバランスシート上の悪化を介した 2 次的な損失連鎖のポジティブ・フィードバック過程によって増幅される^{*5}。Arinaminpathy, et al.(2012)、Battiston, et al.(2012a,b)、Gai and Kapadia(2010)、May and Arinaminpathy(2011)、そして、Nier et al.(2007) などに代表される研究は、こうした特徴を持つ金融システムを銀行間ネットワーク・モデルとして定式化し、システミック・リスクとネットワークの連結度の関係を分析している。

Gai and Kapadia(2010) は、確率母関数アプローチを適用して、初期の銀行デフォルトがネットワーク上の多数の脆弱な銀行群のデフォルトに連鎖する条件を導出した。連結度が小さな水準から増加するにつれて、デフォルトの連鎖発生確率が増大し、ネットワークの平均次数が $3 < z < 4$ の範囲で、デフォルト連鎖の確率が約 0.8 のピークに到達する。この範囲では、一つの銀行がデフォルトすると、金融ネットワークの大多数の銀行群にデフォルトが連鎖波及する。連結度がこの範囲を超えて上昇を続けるとき、一旦デフォルト連鎖が起これば、連鎖倒産の波及規模はネットワーク全体に及ぶが、しかし、デフォルト連鎖の発生確率は低下し続け平均次数が $z = 8$ を越えるところで、デフォルト連鎖の確率はほぼゼロとなる。

Nier et al.(2007) は、類似の定式化を用いたシミュレーションから、純資産の保有比率が増加するに伴って、デフォルトの連鎖確率が低減するが、線形に減少するわけでもないことを確認している。純資産比率が 1% 以下では、デフォルトは銀行間ネットワーク上を大規模なスケールで連鎖し易いが、1% と 4% の間では、デフォルト連鎖の規模は安定して小さい。4% から 5% を超える水準になると、デフォルトが連鎖することはほとんどない。インターバンクの貸出し比率が増加するにつれて、銀行システムの頑強性を強化したり、脆弱化する相反する効果が生じる。しかし、インターバンク貸出し比率が 20% 以下では（純資産保有比率が 5% のとき）、相反する効果は打ち消し合って、銀行システムの頑強性へはほとんど影響しない。18% を越えて増加するとき、デフォルトの連鎖規模が増加する。非流動資産を流動化することから起きる流動性効果は、デフォルトの連鎖を強化する方向に働く事実もシミュレーションから確認された。

May and Arinaminpathy(2011) は、Nier et al(2007) および Gai and Kapadia(2010) の研究で用いられたモデルをより一般化し、流動性ショックの波及過程をより詳細に定式化した上で、シミュレーションに依存して結論を導くだけでなく、解析的な分析手法を活用して直観的な含意を導出することを試みている。基本的には、May and Arinaminpathy(2011) の結論は Nier et al(2007) および Gai and Kapadia(2010) の研究で導出された結論と異なるものではない。Battiston, et al.(2012a,b) の研究も、流動性不足に陥った銀行が長期的資産を売却することから生じる効果を明示的に定式化して、ネットワークの連結度と金融システムの強靱性

^{*5} インターバンク連結を介してデフォルトが連鎖する条件を分析した最初の理論的な研究は Allen and Gale(2000) に代表される。彼らは 4 つの銀行からなる簡単なネットワークを用いて、銀行間ネットワークのリンク連結がより不完全になるにつれてデフォルトが連鎖し易くなり、一つの銀行への流動性ショックが他の銀行の連鎖倒産を引き起こす条件を示している。

の関係に関して、上記の研究と類似の関係性を確認している。これらの研究では、流動性確保のために各銀行がインターバンク市場への貸出しを縮小したり、対外的な企業への貸出しの貸し剥がしを行う動機は明示的に導入されていない。さらに、結論の多くは金融システムがランダムネットワークによって表現されているところに依拠している。ランダムネットワーク・モデルをより現実的なネットワークであるスケールフリー・ネットワークに一般化することが必要である。

3.2 銀行デフォルトの連鎖過程：母関数アプローチ

この節では、Gai and Kapadia(2010) が用いた銀行間ネットワークのモデルを取り上げる。このネットワークはランダムネットワークであるとし、各ノード間のリンク形成はポアソン分布に従うとする。各ノード間のリンクは方向性を持つ。ネットワーク上の銀行（ノード）数を N とする。 $\mathbf{N} = \{1, 2, \dots, N\}$ である。リンクの集合は $G = \{g_{ij}\}$, $g_{ij} \in [0, 1]$, $g_{ii} = 0, i, j \in \mathbf{N}$ である。各リンクは方向性を持つので、必ずしも $g_{ij} = g_{ji}$ とは限らない。 g_{ij} はノード j を出て、ノード i に到達するリンクの強さを示す。 g_{ij} はノード i への流入リンク (in-coming links/borrowing) で、ノード j に対しては流出リンク (out-going links/lending) となっている。リンク形成で各ノードがランダムに選択される確率が p であるとき、各ノードの平均連結数（流入リンクまたは流出リンクの平均数）は $z = p(N - 1)$ となる。

各銀行のバランスシートは資産項目と負債項目からなる。各銀行をノードとする金融ネットワークを考える。各銀行 i の資産 (assets) a_i は民間企業に対する貸付けや証券などの保有から構成される銀行外に対する資産 (external assets) e_i とインターバンク市場 (IB) における貸付け l_i からなる。 $a_i = e_i + l_i$ である。対外的資産 e_i は非流動的であると仮定する。負債 (liabilities) は顧客が預託した預金 d_i 、IB での借入額 b_i 、および純資産（資本バッファ） c_i から構成される。IB においてデフォルトなどがない健全な状態では、銀行のソルベンシー (solvency) 条件は

$$c_i = (e_i + l_i) - (d_i + b_i) \geq 0$$

である。これは銀行 i の対外的支払いが保証されるための条件である。もし銀行 i の純資産額がソルベンシー条件を満たせなくなったとき、つまり、 $e_i + l_i - d_i - b_i < 0$ となったとき、銀行 i は債務超過となり、デフォルトに陥る。一つの銀行のデフォルトは IB 市場を介して他銀行のソルベンシー状態に影響を与える。

純資産比率 γ_i と IB 貸出しの比率 θ_i は

$$c_i = \gamma_i a_i, \theta_i = \frac{l_i}{a_i}$$

と定義される。IB 市場への 1 銀行向けの平均貸出額は

$$w_i = \frac{\theta_i a_i}{z}$$

である。各銀行の平均流出リンク数は z である。平均流入リンク数も $z = \langle z \rangle$ である。モデルを単純化するために、以下では、銀行全体の対外的非流動資産額 $E = \sum_i e_i$ は一定であると仮定する。

i 以外のある銀行のデフォルトが起きたとき、銀行 i の IB 市場貸付けに占めるデフォルト銀行への貸出額の比率を ϕ_i とし、非流動性資産 e_i の市場価格を q_i とする。このとき、銀行 i のソルベンシー条件は

$$q_i e_i + (1 - \phi_i) l_i - d_i - b_i \geq 0$$

となる。IB 市場においてデフォルトした銀行に貸し付けた資金 $\phi_i l_i$ は損失する。もし、デフォルトを避けるために非流動性資産を売却しなければいけないが、信用不安からこの資産の市場価格 q が下落する。この不等式を ϕ_i に関して解くと、

$$\phi_i \leq \frac{c_i - (1 - q_i)e_i}{l_i}, \text{ ただし, } l_i \neq 0$$

となる。銀行 i の純資産額がこの条件を満たせなくなると、銀行 i もデフォルトに陥る。

金融ネットワーク上での各ノードは互いに方向性を持つリンクで連結されている。インターバンク市場で銀行 i から銀行 j への貸出し、または、借入が存在するとき、銀行 i と j の間に矢印付きのリンクが張られている。銀行 i から出るリンク (out-going links) は資金の貸出しを表し、銀行 i へ入ってくるリンク (in-coming links) は銀行 i の資金借り入れを表現する。リンクの方向性は資金の流れと一致する。銀行 i から出るリンク先のノード数を j_i と表記する。貸出先の 1 行がデフォルトを起こすとき、銀行 i の損失額は IB 市場貸出額に対する比率で $1/j_i$ となる。だから、

$$\frac{c_i - (1 - q_i)e_i}{l_i} < \frac{1}{j_i}$$

が成立するならば、銀行 i はデフォルトに陥り、デフォルトは連鎖する。こうした条件を満たす銀行 i が隣人のデフォルトに陥り易い銀行とリンクしているならば、銀行 i はデフォルトに脆弱な (vulnerable) 銀行と呼ばれる。そうでない場合、隣人のデフォルトに対して安全な銀行である。流出次数 (out-dgree) j を持つノード i がデフォルトに陥る確率は

$$v_j = \Pr\left\{\frac{c_i - (1 - q_i)e_i}{l_i} < \frac{1}{j}\right\}$$

である。ここで、 c_i, d_i, e_i のどれを確率変数とするかは未定とする。

流出次数 j 、流入次数 k の銀行がデフォルトに陥る確率は $v_j p_{jk}$ である。ただし、 p_{jk} は流出次数が j 、流入次数が k となる確率である。デフォルトに陥る銀行の流入・流出次数の共同確率分布 $v_j p_{jk}$ に対する確率母関数 $\mathbf{G}(x, y)$ は

$$\mathbf{G}(x, y) = \sum_{j,k} v_j \cdot p_{jk} \cdot x^j \cdot y^k$$

と定義できる。ランダムネットワークの性質から、各ノードに対して、平均流入リンク数は平均流出リンク数と同数であるので、

$$\frac{1}{N} \sum_i j_i = \sum_{j,k} j p_{jk} = \frac{1}{N} \sum_i k_i = \sum_{j,k} k p_{jk} = \langle z \rangle$$

である。ここで、 k_i はノード i の流入リンク数である。デフォルトに脆弱な銀行を任意に選んで、そこに流入しているリンク数の確率分布に対応する母関数は

$$G_0(y) = \mathbf{G}(1, y) = \sum_{j,k} v_j \cdot p_{jk} \cdot y^k$$

である。ここで、 $G_0(1) = \sum_{j,k} v_j \cdot p_{jk}$ はデフォルトに陥り易い銀行の割合である。

ランダムに一つのリンクを選び、このリンクが出ているノードに流入するリンク数に関する確率に対応する母関数 $G_1(y)$ を定義したい。より多数の流出リンクを持つ銀行は最初に選んだ銀行の隣人となる確率がより

高くなる。この確率は $j \cdot p_{jk}$ に比例するので、確率分布は $\xi_{jk} = j \cdot p_{jk} / \sum_{j,k} j \cdot p_{jk}$ となる。最初に選んだデフォルトに脆弱な銀行の隣人でデフォルトし易い銀行への流入リンク分布は $v_j \cdot \xi_{jk}$ となる。よって、対応する母関数は

$$G_1(y) = \sum_{j,k} v_j \cdot \xi_{jk} \cdot y^k = \frac{1}{\sum_{j,k} j \cdot p_{jk}} \sum_{j,k} v_j \cdot j \cdot p_{jk} \cdot y^k$$

である。 $G(1) = \sum_{j,k} v_j \cdot \xi_{jk}$ はリンク先のノードがデフォルトに脆弱な銀行である確率を与える。

デフォルトに脆弱な銀行の一つの流入リンクをランダムに選び、そのリンク元の銀行への流入リンク（銀行）の集合を考える。このノードの集合は、あるデフォルトに脆弱な銀行への一つの流入リンクに連結するデフォルトに脆弱な銀行のクラスター (vulnerable cluster) を表現する*6。デフォルトに脆弱な銀行への流入リンクをランダムに一つ選び、そのリンクに連結するデフォルトに脆弱な銀行のクラスターサイズに関する確率の母関数 $H_1(y)$ は

$$H_1(y) = \Pr\{\text{健全な銀行に到達する}\} + y \sum_{j,k} v_j \cdot j \cdot p_{jk} [H_1(y)]^k / \sum_{j,k} j \cdot p_{jk}$$

となる。リンクを連結しているノードが安全な銀行である確率は $1 - G(1)$ であるから

$$H_1(y) = [1 - G_1(1)] + yG_1(H_1(y)) \quad (2)$$

と表現できる。

ランダムに選んだノードに連結するデフォルトに脆弱な銀行のクラスターの規模の確率分布に対応する母関数を $H_0(y)$ と表記する。選んだノードが健全な銀行である確率は $G_0(1)$ である。選んだノードが脆弱な銀行で流出次数 j 、流入次数 k を持つ確率は $v_j \cdot p_{jk}$ である。一つの流入リンクに連結している脆弱な銀行のクラスターサイズの確率は $H_1(y)$ となっている。よって、

$$H_0(y) = \Pr\{\text{健全な銀行}\} + y \sum_{j,k} v_j \cdot p_{jk} [H_0(y)]^k = [1 - G_0(1)] + yG_0(H_1(y)) \quad (3)$$

となる。(2) 式から $H_1(y)$ を求め、これを (3) 式に代入すれば、 $H_0(y)$ を求めることができる。脆弱な銀行のクラスター・サイズの分布を関数形として解析的に求めることは難しい。

デフォルトに対して脆弱な銀行のクラスター・サイズの平均値 S は

$$S = H'_0(1)$$

で計算できる。 $H_1(y)$ は標準的な母関数なので、 $H_1(1) = 1$ である。よって、簡単な代数計算から

$$S = G(1) + \frac{G'_0(1)G_1(1)}{1 - G'_1(1)} \quad (4)$$

が得られる。相転移が起こる閾値条件は

$$G'_1(1) = 1$$

*6 デフォルトに脆弱な銀行のクラスター・サイズを計算方法については、Callaway, et al.(2000)、Newman, et al.(2001)、Newman(2002)、および Watts(2002) での適用例を参照のこと。

となる。内容を詳細に書き換えると、

$$\sum_{j,k} j \cdot k \cdot v_j \cdot p_{jk} = z \quad (5)$$

が得られる。 $G'_1(1)$ はデフォルトした銀行に連結した脆弱な銀行へ流入するリンク数の平均値である。この平均リンク数が1以下であれば、この隣人銀行にリンク連結した銀行へデフォルトは連鎖しない。反対に、平均リンク数が1以上であれば、ある銀行でデフォルトが発生すると、この銀行倒産は隣人の隣人銀行へと連鎖し、銀行間ネットワーク上の巨大な銀行群クラスターでデフォルトの連鎖が起きる。平均連結度 z が上昇するとき、(5) 式の左辺の jkp_{jk} は増加するが、 v_j は減少する。この段階では、(5) 式を満たす閾値がユニークに存在するか、複数個存在するかは不明である。

Gai and Kapadia(2010) は、各銀行の規模が同一で、 $N = 1000$, $\theta_I = 0.2$, $\gamma_i = 0.04$ と仮定して、数値計算を行っている。平均次数が $0 < z < 10$, $p = z/(N - 1)$ の範囲で、各次数当たり 1000 回のシミュレーションを行った。連結度がゼロから増加するにつれて、1 を越えるあたりからデフォルトの連鎖が始まり、 $3 < z < 4$ に範囲でデフォルト連鎖の確率が約 0.8 のピークに到達する。この範囲では、巨大な脆弱な銀行群クラスターに連結した一つの銀行がデフォルトすると、金融ネットワークの大多数の銀行群にデフォルトが連鎖波及する。連結度がこの範囲を超えて上昇を続けるとき、一旦デフォルト連鎖が起これば、連鎖倒産の波及規模はネットワーク全体に及ぶ。しかし、デフォルト連鎖の発生確率は低下し続け、 $z = 8$ を越えるところで、デフォルト連鎖の確率はほぼゼロとなる。この結果は、連結度の上昇がデフォルト連鎖の発生確率を単調に減少あるいは増加させるとは限らないことを示している。また、純資産の保有比率が、 $\gamma = 0.03, 0.04, 0.05$ の3種類のケースでシミュレーションを行うと、デフォルトの連鎖過程の発生確率は、純資産比率が増加するにつれて減少する。この結論は理論的な直観的から見ても、予想しうる現象で、納得できる結論でもある。

ネットワークの次数分布の平均値のみならず分散が変化するとき、デフォルトの連鎖過程がどのように変化するかを考える。ポアソン分布以外のケース、とりわけ、ネットワークの連結度がスケールフリー分布に従う場合を考える。

参考文献

- [1] Allen, Franklin and Douglas Gale(2000), Financial Contagion, *Journal of Political Economy*, 108(1), 1-33.
- [2] Anand, Kartik, Prasanna Gai, Sujit Kapadia, Simon Brennan, and Matthew Willison(2012), A Network Model of Financial System Resilience, forthcoming to *Journal of Economic Behavior and Organization*.
- [3] Arinaminpathy, Nimalan, Sujit Kapadia, and Robert M. May(2012), Size and Complexity in Model Financial Systems, *Proc. of National Academy of Science*, 109(45), 18338-18343.
- [4] Battiston, Stefano, Domenico Delli Gatti, Mauro Gallegati, Bruce C. Greenwald, and Joseph E. Stiglitz(2012a), Default Cascades: When Does Risk Diversification Increase Stability, *Journal of Financial Stability*, 8, 138-149.
- [5] Battiston, Stefano, Domenico Delli Gatti, Mauro Gallegati, Bruce C. Greenwald, and Joseph E. Stiglitz(2012b), Liasons Dangereuses : Increasing Connectivity, Risk Sharing, and Systemic Risk, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 36(8), 1121-1141.
- [6] Martin L. Beck and Enghin Atalay(2008), The topology of the federal funds market, *European Central Bank*, Working Paper Series No.986. (39ページ)
- [7] Callaway, Duncan S. , M. E. J. Newman, Steve H. Strogatz, and Duncan J. Watts(2000), Network Robustness and Fragility: Percolation on Random Graphs, *Physical Review Letters*, 85, 5468-5471.
- [8] Dodds, Peter Sheridan and Duncan Watts(2004), Universal Behavior in a Generalized Model of Contagion, *Physical Review Letters*, 82(21), 218701.
- [9] Dodds, Peter Sheridan and Duncan Watts(2005), A Generalized Model of Social and Biological Contagion, *Journal of Theoretical Biology*, 232, 587-604.
- [10] Gai, Prasanna and Sujit Kapadia(2010), Contagion in Financial Networks, *Proceedings of the Royal Society A*, 466(2110), 2401-2423.
- [11] Gai, Prasanna, Andrew G. Haldane, and Sujit Kapadia(2011), Complexity, Concentration and Contagion, *Journal of Monetary Economics*, 58, 453-470
- [12] Haldane, Andrew G.(2009), Rethinking the Financial Network, Bank of England, Working Paper.
- [13] Haldane, Andrew G. and Robert M. May(2011), Systemic Risk in Banking Ecosystems, *Nature*, 469, 351-355.
- [14] López-Pintado, Dunia(2006), Contagion and Coordination in Random Networks, *Int. J. Game Theory*, 34, 371-381.
- [15] López-Pintado, Dunia(2008), Diffusion in Complex Social Networks, *Games and Economic Behavior*, 62, 573-590.
- [16] May, Robert M. and Nimalan Arinaminpathy(2010), Systemic Risk: the Dynamics of Model Banking Systems, *Journal of the Royal Society Interface*, 7, 823-838.
- [17] Newman, M. E. J.(2002), The Spread of Epidemic Disease on Networks, *Physical Review E*, 66, 016128.

- [18] Newman, M. E. J. , Steven H. Strogatz, and Duncan J. Watts(2001), Random Graph with Arbitrary Distributions and their Applications, *Physical Review E*,64, 7332-7342.
- [19] Nier, Elrend, Jing Yang, Tanju Yorulmazer and Amdeo Alentorn(2007), Network Models and Financial Stability, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 31, 2033-2060.
- [20] Pastor-Satorras, Romuald and Alessandro Vespignani(2001), Epidemic Spreading in Scale-Free Networks, *Physical Review Letters*, 86, 3200.
- [21] Roukny, Tarik, Hugues Bersini, Hugues Pirotte, Guido Caldarelli, and Stefano Battiston(2013), Default Cascades in Complex Networks: Topology and Systemic Risk, *Scientific Reports*, 3, 1-8.
- [22] K. Soramäki, M. L. Bech, M. J. Arnold, R. J. Glass, and W. E. Beyeler(2006), The topology of interbank payment flows, *Federal Reserve Bank of New York*, Staff Report no.243. (13 ページ)
- [23] Vega-Redondo, Fernando(2007), *Complex Social Networks*, Cambridge University Press.
- [24] Watts, Duncan J. (2002), A Simple Model of Global Cascades on Random Networks, *Proc. of National Academy of Science*, 99(9), 5766-5771.
- [25] 増山 幸一 (2014)、「社会的ネットワークにおけるイノベーションの拡散過程」、mimeo、明治学院大学経済学部.
- [26] 稲岡創、二宮拓人、谷口健、高安秀樹 (2003)、「金融機関の資金取引ネットワーク」、日本銀行金融市場局、ワーキングペーパー. (28 ページ)
- [27] 今久保圭・副島豊 (2008)、「コール市場の資金取引ネットワーク」、日本銀行『金融研究』. (54 ページ)
- [28] George Akerlof and Robert Shiller(2008)、『アニマルスピリット：人間の心理がマクロ経済を動かす』東洋経済新報社、第7章、第11章 (60 ページ)
- [29] 増山 幸一 (2015)、「講義ノート ネットワーク理論入門」
- [30] 増山 幸一 (2015)、「講義ノート 金融ネットワークのトポロジーと安定性」