

1. 現在価値
 - 1.1 元本と金利
 - 1.2 現在価値
2. 投資基準と年金公式
 - 2.1 投資基準
 - 2.2 応用
 - 2.3 年金公式
3. ポートフォリオ理論
 - 3.1 統計データの処理
 - 3.2 ポートフォリオのリスクとリターン
 - 3.3 ポートフォリオ理論
 - 3.5 期待効用仮説と平均・分散アプローチ
4. 資本資産の評価モデル
 - 4.1 市場均衡
 - 4.2 CAPM
 - 4.3 CAPM の応用
 - 4.4 ファクター・モデル
 - 4.5 裁定価格理論

以上

序

(1) ファイナンスとは？

①実物資産への投資、②金融資産への投資(資金運用)、③資本支出予算・資金調達 に関わる意思決定問題を解決するための理論を提供

①と③の領域を含む分野を通常、コポーレート・ファイナンス(企業財務)という

①、②、③全体を探究領域とする経済学を金融経済学(financial economics)という

(2) キャッシュ・フロー(cash flow)

キャッシュ・フロー＝投資期間中に投資家に流入する現金と流出する現金

通常、キャッシュ・フローは毎四半期末、毎年末という特定期日に発生

キャッシュ・フローが四半期毎に発生するとき、基本的期間は四半期となる

キャッシュ・フローが1年毎に発生するとき、基本的期間は四半期となる

例：銀行預金の金利、自動車ローンや住宅ローンのモーゲージの毎月支払い

投資問題は将来のキャッシュ・フロー流列によって定式化される

(3) 主要概念

● 比較原則(comparison principle)

金融市場は比較原則によって意思決定を単純化する

例：A氏は、彼に100万円預ければ、1年後に110万円支払うと約束している。彼の支払いは、彼が国債の信託基金を保有していることによって保障されているとする。投資リスクはない。この投資を行うべきかどうか？

この投資は10%の金利をもたらす。短期国債の年金利が7%であったときは、この投資を実行した方が良い。反対に、国債の年金利が12%であるときには、止めた方が良い。

投資は、金融市場で利用可能な他の投資の収益率と比較することによって評価できる

● 裁定(さや取り、arbitrage)

A銀行での貸出しと預金の金利が10%で、B銀行での貸出しと預金の金利が12%であった

A銀行で金利10%で100万円借り、それをB銀行に金利12%で預金した

⇒ 1年間で自己資金を用いずに、100万円の2%、つまり2万円を稼げる

裁定行為という

通常、金融市場では裁定行為が起こらないように、類似の金融資産では同一の金利が成立している

⇒ 効率的な金融市場では、裁定機会が存在しないことを仮定する

● リスク回避(risk aversion)

2種類の投資機会があり、それぞれの投資の期待収益率は同一である

一方の投資収益は確実であるが、他方の投資は不確実である

投機を好まない人は、リスクのある第2案よりもリスクのない第1案を選択する

⇒ リスク回避をする

国債への投資；国債からは 10%の固定収益が得られる

株式への投資；収益は不確実である

⇒ 投資家が株式へ投資するためには、株式の期待収益率は 10%以上

より大きなリスクを受け入れるためには、より大きな期待収益率を要求する

⇒ 平均分散分析、ポートフォリオ選択の理論

● ヘッジ(hedging)

事業活動あるいは投資活動に伴う金融リスクを減らすための方法

保険によるヘッジ：

固定金額(プレミアム、premium)を支払うことによって、火事、盗難、事故などによる損失や不利な価格変動による損失に対して保証金が支払われるように手配する

パン屋によるヘッジの例：

パン屋さんは小麦粉と他の材料を購入して、これを焼き上げて商品を作る

将来の小麦価格は不確実、小麦粉の価格リスクに直面している

価格リスクを回避するために、小麦粉の先物契約を用いる

● 価格付け(pricing)

投資が生み出す将来のキャッシュ・フローが(不確実性を伴って)既知であるとき、現時点での投資の価格はいくらか？

1 年後に 110 万を受取れる投資機会がある

この投資の現時点での価値はいくらか？

当該投資機会と類似のリスクを持つ金融資産の金利が 10%であるならば、

この投資の現時点での価格は 100 万円 (100 万円の 10%は 10 万円)

市場金利が r であるとき、1 年後に X 万円を受取る投資の価格は $= \frac{X}{1+r}$ 万円

⇒ 債券価格、株式価格、先物価格、オプションの価格

● 取引と価格のダイナミックス

同じ金融商品あるいは類似の金融商品が連続的に取引される

⇒ 取引はダイナミックである

⇒ 資産の将来価格が時間と共に動き、不確実性に支配される

価格過程はダイナミックな確率モデルで表現、

2 項格子モデル、確率差分方程式、確率微分方程式による表現

(4) 投資と資金運用問題

● 金融資産の投資理論

金融資産の運用によって、より多くの収益を得るための投資

⇒ ポートフォリオ選択問題、金融資産の価格付けモデル(CAPM)、

● 実物投資理論

事業活動に投資することによってより多くの収益を得るための投資

新しい工場建設を行うかどうかの決定

新製品開発のための R&D 投資を行うかどうか決定

新規市場に参入するかどうか決定

⇒ リアル・オプションズ・アプローチ

1. 現在価値と投資基準

1.1 元本と利息

例：金利が年 8% の銀行預金に 1 万円投資するとき、1 年後には、口座に 1 万円の元本(もともとの金額：principal)と 800 円の利息、金利(interest)を加えた計 1 万 800 円が入っている

金利 r を少数で表現するとき、初期投資額は 1 年後には $(1+r)$ 倍になる

● 単利(simple interest)

初期投資額 A 、年金利 r (単利) とするとき、初期投資額 A のみが金利を生む

1 年後の金利は rA 、2 年後の累積金利は $2rA$ 、3 年後の累積金利は $3rA$

単利 r で初期投資金額 A が銀行口座に残っているとき、 n 年後には口座に入っている総金額 $V = (1 + nrA)$

● 複利(compound interest)

金利 r が年複利であるとき、

1 年後の金利は rA 、 $\Rightarrow$ 1 年後の元本は $(1+r)A$

2 年後の金利は $r(1+r)A$ 、この金利は元本に加えられる $\Rightarrow$ 2 年後の元本は $(1+r)^2 A$

n 年後には、銀行口座に入っている金額は $V = (1+r)^n A$; 幾何的増大

例：何年後に口座の金額は 2 倍になるでしょうか？

$$2A = (1+r)^n A \text{ より、} \ln 2 = n \ln(1+r)$$

近似式 $\ln(1+r) \approx r$ 、 $\ln 2 \approx 0.69$ を用いると、 $n \approx 0.69/r$

年金利 7% で投資された資金は、約 10 年後に 2 倍となる

年金利 10% で投資された資金は約 7 年後に 2 倍となる

● 金利の基本期間の短縮化

年金利 r で、金利支払いが四半期毎に行われるとき、複利で運用されるならば

3 ヶ月後の口座にある金額は $(1+r/4)A$

6 ヶ月後の口座にある金額は $(1+r/4)^2 A$

9 ヶ月後の口座にある金額は $(1+r/4)^3 A$

12 ヶ月後の口座にある金額は $(1+r/4)^4 A$

年金利 r で、金利支払いが四半期毎に行われるとき、単利で運用されるならば

12 ヶ月後の口座にある金額は $(1+r)A$

一般的に、 $(1 + \frac{r}{n})^n > 1 + r$ が成立する

複利で四半期後の金額は単利で四半期後の金額よりも大きい

例：年金利 8% のとき

四半期複利で 1 年後の金額は $(1.02)^4 \approx 1.0824$

実効利率は 8.24% であるという、8% を名目利率という
年金利 r (名目金利)、年を m 期間に分けて、複利で運用するとき、

1 年後の金額は $(1 + r/m)^m$ 倍となる

$$(1 + r/m)^m = 1 + r' \text{ を満たす } r' \text{ を実効年金利とい}$$

● 連続複利 (continuously compounded rate)

1 年を分割する期間数を増大させて、無限大にすると、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (1 + \frac{r}{m})^m = \lim_{m \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{m/r})^{(m/r)r} = e^r$$

ここで、 e は自然対数の底で、 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$ 、2.7183...

実効金利： $e^r = 1 + r'$ をみたす r'

t 年後には金額は $\lim_{m \rightarrow \infty} (1 + \frac{r}{m})^{mt} = e^{rt}$ 倍となる (t 年後は mt 回の複利計算) 指数増加関数

名目金利が 8% (年率) のとき、 $e^{0.08} \approx 1.0833 \Rightarrow$ 実効金利は 8.33% (四半期複利のとき 8.24%)

時間を年単位変数 t で表現すると、 $t = 1$ は 1 年に相当、 $t = 0.25$ は 3 ヶ月に相当

連続複利のとき、2 倍になる年数は $e^{rt} = 2$ を満たす $t \Rightarrow rt = \ln 2$

$\ln 2 \approx 0.69$ を用いて、 $t = \ln 2 / r = 0.69 / r$

1.2 現在価値(present value)

(1) 1年後に11000円受取る

(2) 今10000円を受取り、それを年間金利10%の銀行預金で運用する

a. と b. とは1年後に11000円を受取るという意味で、等価値である

⇒ 1年後の11000円は現在の10000万円と等価値

1年後の11000円の現在価値は10000万円(市場金利が10%のとき)

年間金利を r とするとき、1年後の1円の現在価値(present value、PV) $= \frac{1}{1+r}$ 円

1年後に1万円の返済をする負債の現在価値は、 $\frac{1}{1+r}$ 万円

1年後に1万円のキャッシュ・フローを生み出す資産の現在価値は $\frac{1}{1+r}$ 万円

現在価値の計算=将来のキャッシュ・フローを割引因子(discount factor)で割引く

通常、割引因子 $= 1 + \text{割引率}$

割引率として1年金利 r が使用されるとき、割引因子 $= 1 + r$

1年後のキャッシュ・フロー C の現在価値 $PV = \frac{1}{1+r} C$

$\frac{1}{1+r}$ = 割引係数

(1) 2年後に121万円を受け取る

(2) 100万円を金利10%で2年間複利運用するとき、

2年後の元利合計 $= (1 + 0.1)^2 100 = 121$ 万円

⇒ 2年後の $(1 + 0.05)^2 100$ 万円は現在の100万円と等価値

割引率が0.05のとき、2年後の $(1 + 0.05)^2 100$ 万円の現在価値は $\frac{100}{(1 + 0.1)^2} = 100$ 万円

2年間に渡る割引率を r_2 とすると、2年後のキャッシュ・フロー C 円の現在価値 PV は

$$PV = \frac{1}{(1+r_2)^2} C$$

不動産投資の例：所有していたアパートが全焼し、500万円の価値を持つ空き地と火災保険会社からの保険金支払い3000万円が残った。

オフィス・ビルを建設するプロジェクト案。

オフィス・ビルの建設費は3000万円であるが、需要増から、1年後にオフィス・ビルを売れば、4000万円で売却できると予想される。

1年後のキャッシュ・フローが確実であるとして、1年後の4000万円の現在価値は

$$PV = \frac{1}{1+r} 4000 \text{ (万円)}$$

割引率は？

(投資の代替案)資金を国債に投資、1年間運用するときの金利は7%である

⇒ 1年後に4000万円を受取るためには、国債に $4000/1.07 \approx 3738$ (万円) 投資する必要
国債の金利7%を割引率に採用するとき、

オフィス・ビル建設投資の現在価値=3738万円

割引率；通常、資本市場で代替可能な投資が保障する収益率が採用、

ハードル・レート、資本の機会費用(資本コスト)、とも呼ばれる
建設されたオフィス・ビルの現在価値は3738万円だが、投資の収益は？

ビル建設への投資額は3500万円(土地代を含む)

正味現在価値(net present value、NPV)=投資プロジェクトの現在価値－支出した投資額

$NPV=3738 \text{ 万円} - 3500 \text{ 万円} = 238 \text{ 万円}$ 投資収益の現在価値

収益=4000万円－3500万円=500万円

収益率=収益／投資額=500／3500=約0.14>0.07

● キャッシュ・フロー流列の現在価値

例：財務省証券への投資

1年物財務省証券は1年後に100万で償還される、年金利が $r_1=7\%$ である

$$1 \text{ 年物財務省証券の現在価値} = PV = \frac{C_1}{1+r_1} = \frac{100}{1.07} \approx 93.46 \text{ 万円}$$

2年満期の財務省証券の年利率 r_2 が7.7%、2年後に100万円で償還される証券の現在価値

$$= PV = \frac{C_2}{(1+r_2)^2} = \frac{100}{1.077^2} \approx 86.21 \text{ 万円}$$

現在価値は現在の円の価値だから、加算できる

$$1 \text{ 年物と} 2 \text{ 年物の財務省証券を保有するときの現在価値} = PV = \frac{C_1}{1+r_1} + \frac{C_2}{(1+r_2)^2}$$

所有する資産のキャッシュ・フローが流列 $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ のとき

C_j =第j期でのキャッシュ・フロー)、 r_j =第j期間における1期間当たり金利

$$\text{現在価値} \quad PV = \frac{C_1}{1+r_1} + \frac{C_2}{(1+r_2)^2} + \dots + \frac{C_n}{(1+r_n)^n}$$

割引キャッシュ・フロー(discounted cash flow, DCF)という

正味現在価値を求めるためには、現在におけるキャッシュ・フローを加算する必要がある

$$NPV = C_0 + \frac{C_1}{1+r_1} + \frac{C_2}{(1+r_2)^2} + \dots + \frac{C_n}{(1+r_n)^n} = C_0 + \sum_{j=1}^n \frac{C_j}{(1+r_j)^j}$$

例：キャッシュ・フローが $\{C_0, C_1, C_2, C_3\} = \{-2, 1, 1, 1\}$ であるような投資の正味現在価値は、割引
率が一定で10%であるとき、

$$NPV = -2 + \frac{1}{1.1} + \frac{1}{(1.1)^2} + \frac{1}{(1.1)^3} \approx 0.487$$

問題：オフィス・ビル建設の投資プロジェクト。500 万円で土地を購入し、オフィス・ビルを建てると、2 年後に、このビルは4000 万円で売却できると予想されている。ビルの新築費用は総額で3000 万円必要であるが、今年、1 年後、2 年後の3 回に分けて支払われる。正味現在価値はいかほどか？

代替的な投資案として、国債を購入することを考える。国債の年金利は 6%である。2 年後の額面 4000 万円である国債を購入するとした。

2. 投資基準と年金公式

2.1 投資基準

● 正味現在価値による投資判断

投資に関連するすべてのキャッシュ・フローを含める $\Rightarrow$ 投資の正味現在価値(正味現在価値とも言う)の計算

正味現在価値 = 利益の現在価値 - 費用の現在価値

投資の正味現在価値が大きければ大きいほど、優れた投資案

投資の正味現在価値が正の時、投資は収益をもたらす

投資の正味現在価値が負の時、投資は赤字をもたらす

$\Rightarrow$ 投資の正味現在価値が正になるときにのみ、投資は行われるべきである

● 内部収益率による投資判断

キャッシュ・フロー流列の現在価値をゼロとするような割引率を内部収益率という
(internal rate of return)

キャッシュ・フロー流列が $\{C_0, C_1, \dots, C_n\}$ であるとき、内部収益率 r は

$$0 = C_0 + \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{C_n}{(1+r)^n} \quad \text{を満たす}$$

$$x = 1/(1+r) \text{ とおくと、} \quad C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_nx^n = 0, \quad r = 1/x - 1$$

例：キャッシュ・フロー流列が $\{-2, 1, 1, 1\}$ であるとき、内部収益率を求めよう。

$$-2 + \frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \frac{1}{(1+r)^2} = 0$$

この多項式の解は、 $r=0.23$

内部収益率が高ければ高いほど、投資はより望ましい

内部収益率が市場金利よりも大きいとき、その投資は行われるべき

内部収益率が市場金利よりも小さいとき、その投資案は棄却されるべき

● 例

樹木伐採の例：苗木を植栽して、一定期間後に樹木を伐採して板材にして販売する

案 a：1 年後に伐採する

案 b：2 年後に伐採する

初期費用：苗木の植栽費用のみ

案 a のキャッシュ・フロー $\{-1, 2\}$ 、案 b のキャッシュ・フロー $\{-1, 0, 3\}$

市場金利が 10% (年率) である

投資案 a の正味現在価値 $NPV = -1 + 2/1.1 = 0.82$

投資案 b の正味現在価値 $NPV = -1 + 2/(1.1)^2 = 1.48$

したがって、正味現在価値基準からすると、投資案 b の方が望ましい

投資案 a の内部収益率は $-1 + 2x = 0$ を満たす $\Rightarrow x = 1/2$

投資案 b の内部収益率は $-1 + 3x^2 = 0$ を満たす $\Rightarrow x = 1/\sqrt{3}$

投資案 a の内部収益率 $r = 1/x - 1 = 2 - 1 = 1$

投資案 b の内部収益率は $r = 1/x - 1 = \sqrt{3} - 1 \approx 0.7$

内部収益率基準に従えば、投資案 a の方が望ましい

正味現在価値基準による結論と反対

内部収益率基準は、両方の投資案が繰り返し可能であること前提とする

正味現在価値基準は、各投資案を一つの完結プロジェクトとして想定

$\Rightarrow$ 正味現在価値基準の方がより一般的な基準である

繰り返される各投資すべてを一つの投資プロジェクトとして理解する
内部収益率基準を用いたとき、

投資案 a は投資案 a を 2 年サイクルで無限に繰り返すことを想定

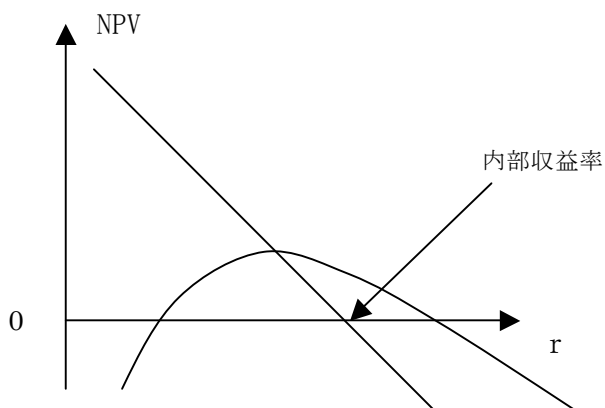
投資案 b は投資案 b を 3 年サイクルで無限に繰り返すことを想定

この想定を正味現在価値基準で使用すれば、同じ結論となる

詳細は、『コーポレート・ファイナンス』第 5、6 章を参照

正味現在価値 $NPV = C_0 + \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(1+r)^n}$

割引率 r の減少関数となる；単調性について？



2.2 応用

現在価値の公式： $PV = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{C}{(1+r)^{n-1}} = c \frac{1}{r} [1 - \frac{1}{(1+r)^n}]$

証明： $a \equiv C/(1+r), x = 1/(1+r)$ とおくと、

$$PV = a(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})$$

$$xPV = a(x + x^2 + \cdots + x^n)$$

両式の引き算をすると、 $(1-x)PV = a(1-x^n)$

$$\text{よって、} (1 - \frac{1}{1+r})PV = \frac{C}{1+r} (1 - (\frac{1}{1+r})^n)$$

$$\text{したがって、} PV = \frac{C}{r} [1 - (\frac{1}{1+r})^n] \quad (\text{証終})$$

例：金鉱プロジェクト

X 金鉱は大量の金埋蔵量を持つ。金鉱所有者との 10 年間の採掘権契約を考える。

採掘販売費用：1 オンス当たり 200 万円

生産量：年間当たり 1 万オンスまで

金の市場価格：1 オンス 400 万円

市場金利：年率 10%

金の市場価格、操業費用、市場金利は 10 年間一定とする(簡単化の仮定)

採掘権の現在価値はいかほどか？

1 年あたりのキャッシュ・フローは $10000 \times (400 \text{ 万円} - 200 \text{ 万円}) = 200 \text{ 億円}$

キャッシュ・フローは年末に発生するとする

10 年間のキャッシュ・フロー流の現在価値は $PV = \sum_{j=1}^{10} \frac{200}{(1.1)^j}$ 億円

現在価値の公式から

$$PV = \frac{200}{0.1} [1 - (\frac{1}{1.1})^{10}] \approx 1229 \text{ 億円}$$

● 名目金利と実質金利

インフレは貨幣価値を下落させる ⇒ 1 円で購買できる商品の量が減少する
貨幣の購買力が下落する

インフレ率 $f=1$ 年間の物価上昇率(少数表示)

1 年後の価格が平均的に現在の水準の $(1+f)$ 倍となる

貨幣の購買力は現在よりも $1/(1+f)$ 倍となる

⇒ k 年後の価格は平均的に現在の $(1+f)^k$ 倍となる

貨幣の購買力は現在よりも $1/(1+f)^k$ 倍となる

キャッシュ・フローは円で表示されるので、インフレがあると、その購買力は下落

実質的なキャッシュ・フローの価値を計算する必要性

1 年後の実質キャッシュ・フロー = 名目キャッシュ・フロー / $(1+f)$

k 年後の実質キャッシュ・フロー = 名目キャッシュ・フロー / $(1+f)^k$

例：100 万円を 20 年間、年率 10%の金利を生み出す資産に投資した。インフレ率は 20 年間平均で 6%である

20 年後の名目キャッシュ・フローは $100 \cdot (1.1)^{20} = 672.75$ 万円

キャッシュ・フローの実質値は $100 \cdot (1.1)^{20} / 1.06^{20} \approx 209.76$ 万円

20 年後現在の 6 倍の円を手にするが、商品を購入できる量は 2 倍に過ぎない

名目金利を r とするとき、 $1 + \rho = \frac{1+r}{1+f}$ を満たす ρ を実質金利という

この式を変形すると、 $\rho = \frac{r-f}{1+f}$

インフレ率が非常に小さいときには、 $\rho \approx r - f$

インフレ率が 6%、名目金利が 10%のとき、実質金利は

$$1 + \rho = 1.1 / 1.06 \approx 1.0377$$

から計算できる

10%の名目金利は約 3.8%の実質金利となる

2.3 年金公式

● 永久債(perpetual annuity, perpetuity)

元本の償還義務はないが、毎年一定額の利息(クーポンという)を永久に払い続ける債券

クーポンを C 、割引率を r とすると、永久債の現在価値は

$$PV = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \dots$$

ここで、 $a \equiv C/(1+r), x \equiv 1/(1+r)$ とおくと、

$$PV = a(1 + x + x^2 + \dots)$$

$$xPV = a(x + x^2 + \dots)$$

両式の引き算をすると、 $(1-x)PV = a$

$$\text{よって、} \left(1 - \frac{1}{1+r}\right)PV = \frac{C}{1+r}$$

$$\text{したがって、} PV = \frac{C}{r}$$

例：大富豪が大学にファイナンスの冠講座を寄付したいと思っている。金利を 10%として、毎年 10 万ドルを永久に提供できるようにすることが目標とする。大学に現在寄付をする金額はいくら必要か？

上の公式から、 $PV = \frac{10}{0.1} = 100$ 万ドル

寄付を考えている人が毎年の賃金率上昇を考慮したとする。賃金率上昇率が年 4% であるとき、毎年の提供金額は 1 年目は 10 万ドル、2 年目は 10.4 万ドル、などとなる。賃金上昇率を g とすると、賃金率を考慮した寄付の現在額は

$$PV = \frac{C}{1+r} + \frac{C(1+g)}{(1+r)^2} + \frac{C(1+g)^2}{(1+r)^3} + \dots$$

上の公式導出と同様にして、

$$PV = \frac{C}{r-g}$$

ここでの例を計算すると、

$$PV = \frac{10}{0.1-0.04} \approx 166.66 \text{ 万ドル}$$

● 年金原価 (annuity factor)

年金型投資商品 (annuity)

＝特定の期間、毎年(あるいは毎月)一定額の支払いが行われる資産

住宅ローンモーゲージ、分割払信用契約など

1 年後から t 年後までの期間、毎年キャッシュ・フロー C を生む年金を考える

現在価値の公式から、

$$\text{この年金の現在価値 } PV = C \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r(1+r)^t} \right] \quad [\text{内を年金原価という}]$$

例：冠講座を 1 年後から 20 年間に限って毎年 10 万ドルを寄付するためには現在いくら必要か？
金利を 10% とすると、

$$PV = 10 \left[\frac{1}{0.1} - \frac{1}{0.1 \cdot 1.1^{20}} \right] = 10 \times 8.514 = 85.14 \text{ 万ドル}$$

今年から寄付を始める場合、必要となる金額は

$$PV = C \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r(1+r)^t} \right] \times (1+r)$$

を用いて計算できるので、

$$PV = 85.14 \times 1.1 = 93.654 \text{ 万ドル} \quad \text{となる}$$

現在 P 万円の住宅ローンを借り入れて、これを t 年間で償却するために必要となる毎期の返済額 C は

$$P = C \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r(1+r)^t} \right]$$

を満たさなければならない。この式を C について解くと、

$$C = \frac{r(1+r)^t}{(1+r)^t - 1} P$$

例：銀行から 1000 万円借りるとする。ローンの返済条件は年利 12%で毎月の複利とする。5 年間でこのローンを償却するためには、毎月いくらの金額を支払うことになるか？

年利 12%の月複利は月 1%

5 年は 60 ヶ月

毎月の支払い C は

$$C = \frac{0.01(1.01)^{60}}{(1.01)^{60} - 1} 1000 = 22.24 \text{ 万円}$$

3. ポートフォリオ理論

3.1 統計データの処理

統計データの処理：(高校1年生の数学1のテキストから)

n 個のデータ $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ が観測されている。

$$\text{観測データの平均値 } \bar{x} = \frac{1}{n} \{x_1 + x_2 + \dots + x_n\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

標本平均とも言う

各観測値の平均値からの偏差 $= x_i - \bar{x}, i = 1, 2, 3, \dots$

標本の分散 = 各偏差の二乗の平均値

$$\text{標本分散 } s^2 = \frac{1}{n} \{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \text{ 標準偏差} = s$$

公式： x のデータの分散 = (x^2 のデータの平均値) - (x の平均値の二乗)

$$s^2 = \frac{1}{n} \{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2\} - \bar{x}^2$$

注：各観測値が確率 $\frac{1}{n}$ で起きると想定

収益率のデータ：収益率の観測値が N 個のデータ $(r_1, r_2, \dots, r_N)$ で与えられる

$$\text{標本の期待値(平均値)} \bar{r} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N r_t \quad \text{期待収益率は標本平均値に等しいとおいても良い}$$

$$\text{標本の分散} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (r_t - \bar{r})^2$$

Excel での計算

平均値の計算：AVERAGE 関数、

標本分散の計算：VARP 関数、

例4 キリンビールの株式の収益率が1年間のデータが以下の表のようになっていた。

キリンビール株の収益率	
1月	-0.0215
2月	-0.0028
3月	-0.0121
4月	-0.0274
5月	0.0444
6月	0.0284
7月	-0.0221
8月	-0.0621
9月	-0.0414
10月	-0.0635
11月	-0.0117
12月	-0.0890
期待収益率	-0.0234
収益率の標本分散	0.0013
収益率の母分散	0.0014

確率分布が既知のケース：(高校2年生の数学Bのテキストから)

(A) 標本空間が離散的集合のケース(離散的確率変数)

ランダムな変数 x ：のいずれか一つの値をとる

確率変数 x が取り得る値の集合 S ：標本空間という

標本空間 S は有限個の離散的な値の要素からなる

x_i が起きる確率： $\Pr(x = x_i)$ と表記

標本空間 S と標本空間の各要素が起こる確率 $\Pr(x = x_i)$ が与えられるとき、 x を確率変数という

例：サイコロを振って出る目の数字は $\{1, 2, \dots, 6\}$ のいずれかである。標本空間を $S = \{1, 2, \dots, 6\}$ とし、サイコロを振って出る目の数を x とする。

変数 x が $\{1, 2, \dots, 6\}$ のいずれかを取る相対頻度 $= 1/6$

$$\Leftrightarrow \Pr(x = i) = \frac{1}{6}, i = 1, 2, \dots, 6$$

確率密度関数の定義：確率変数を X とする

標本空間が離散的集合のケース(離散的確率変数)： $S = \{x_1, x_2, \dots\}$

X の確率密度関数 f ： $f(x_i) = \Pr(X = x_i), i = 1, 2, \dots$

密度関数の値域は閉区間 $[0, 1]$

(1) $f(x_i) \geq 0, i = 1, 2, \dots$

$$(2) \quad \sum_i f(x_i) = 1$$

期待値(平均値)の定義

確率変数 X の期待値を $E(X)$ と表現する

離散的確率変数のケース： $E(\cdot)$ は期待値を計算する作用素(オペレーター)

$$E(X) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \cdots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i)$$

期待値の性質：

- (1) c が定数であるとき、 $E(cX) = cEX$
- (2) X, Y を有界な期待値を持つ確率変数であるとき、 $E(X + Y) = EX + EY$
- (3) X と Y が互いに独立で、有界な期待値を持つとき、 $E(XY) = EX \cdot EY$

分散の定義

確率変数 X の分散を $Var(X)$ と表現する、

$$Var(X) = E[(X - EX)^2]$$

分散のルートを標準偏差という (標準偏差 = $\sqrt{Var(X)}$)

離散的確率変数のケース：

$$Var(X) = (x_1 - EX)^2 f(x_1) + (x_2 - EX)^2 f(x_2) + \cdots + (x_n - EX)^2 f(x_n) = \sum_{i=1}^n (x_i - EX)^2 f(x_i)$$

$$\text{公式： } Var(X) = E[(X - EX)^2] = E(X^2) - (EX)^2$$

共分散の定義

確率変数 X と Y の共分散を $Cov(X, Y)$ と表現する

$$Cov(X, Y) = E[(X - EX)(Y - EY)]$$

表記法： $\sigma_X^2 \equiv Var X$, $\sigma_{XY} \equiv Cov(X, Y)$ 標準偏差 = σ_X

離散的確率変数のケース：

$$Cov(X, Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - EX)(y_j - EY) f(x_i, y_j)$$

$$\text{公式 } Cov(X, Y) = E[(X - EX)(Y - EY)] = E(XY) - EX \cdot EY \quad \text{が成立する}$$

分散の性質

- (1) 二つの確率変数 X, Y の和の分散： $Var(X + Y) = Var X + Var Y + 2Cov(X, Y)$
- (2) X と Y が互いに独立であるとき、 $Var(X + Y) = Var X + Var Y$
- (3) c が定数であるとき、 $Var(X + c) = Var X$, $Var(cX) = c^2 Var X$

標本空間が実数区間の場合(連続確率変数)：

ランダムな変数 x ：実数区間 $S = [a, b], a < b$ あるいは $S = (-\infty, +\infty)$ に属する値をとる

このケースでは、 $P(X = x) = 0, x \in R$ なので、密度関数を直接的に定義できない

分布関数 F の定義： $F(x) = P(X \leq x), -\infty < x < +\infty$

分布関数は非減少関数で、連続である。 $0 \leq F(x) \leq 1$

確率密度関数 f の定義： $f(x)dx = F(x+dx) - F(x), -\infty < x < +\infty$

つまり、 $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

このとき $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

例：正規分布

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

期待値と分散の定義

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 f(x)dx$$

$$Cov(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)(y - EY)f(x, y)dxdy$$

例 1：1 万円投資する。コインを 2 枚投げ、表が出た回数に応じて、投資した額に 20% が加算され、裏が出た回数に応じて投資した額から 10% が差し引かれる。

結果	確率	収益率
表＋表	0.25	40%
表＋裏	0.25	10%
裏＋表	0.25	10%
裏＋裏	0.25	-20%

$$\text{期待収益率} = 0.25 \times 40 + 0.5 \times 10 + 0.25 \times (-20) = 10\%$$

$$\text{収益率の分散} = 0.25 \times (40 - 10)^2 + 0.5 \times (10 - 10)^2 + 0.25 \times (-20 - 10)^2 = 450$$

$$\text{標準偏差} = \sqrt{450} \approx 21.2$$

例 2：1 万円投資する。コインを 2 枚投げ、表が出た回数に応じて、投資した額に 35% が加算さ

れ、裏が出た回数に応じて投資した額から 25% が差し引かれる。

結果	確率	収益率
表 + 表	0.25	70%
表 + 裏	0.25	10%
裏 + 表	0.25	10%
裏 + 裏	0.25	- 50%

$$\text{期待収益率} = 0.25 \times 70 + 0.5 \times 10 + 0.25 \times (-70) = 10\%$$

$$\text{収益率の分散} = 0.25 \times (70 - 10)^2 + 0.5 \times (10 - 10)^2 + 0.25 \times (-50 - 10)^2 = 1800$$

$$\text{標準偏差} = \sqrt{1800} \approx 42.4$$

例 1 と例 2 の期待値は同じ、例 2 の標準偏差は例 1 の 2 倍
 $\Rightarrow$ 例 2 のリスクは例 1 の 2 倍

観測データ値からの計算方法と対比：

観測値が N 個の $(r_1, r_2, \dots, r_N)$ で与えられる

$$\text{標本の期待値 (平均値)} \bar{r} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i$$

$$\text{標本の分散} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (r_i - \bar{r})^2$$

母集団の期待値は標本平均値に等しい

標本分散の平均値は母分散と異なる。

標本の大きさが N であるとき、標本分散の平均値は母分散の $\frac{N-1}{N}$ 倍となる。

だから、収益率の分散 $= \frac{N}{N-1} \times \text{標本分散}$ で計算する。

$$\text{母集団の分散} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (r_i - \bar{r})^2$$

Excel での計算

平均値の計算：AVERAGE 関数、

母集団の分散の推定値：VAR 関数 (正規分布のとき)、または VARA 関数

母集団の標準偏差の推計値：STDEV 関数 (正規分布のとき)、または STDEVA 関数

例 4 キリンビールの株式の収益率が 1 年間のデータが以下の表のようになっていた。

キリンビール株の収益率	
1月	-0.0215
2月	-0.0028
3月	-0.0121
4月	-0.0274
5月	0.0444
6月	0.0284
7月	-0.0221
8月	-0.0621
9月	-0.0414
10月	-0.0635
11月	-0.0117
12月	-0.0890
期待収益率	-0.0234
収益率の標本分散	0.0013
収益率の母分散	0.0014

3.2 ポートフォリオのリスクとリターン

リスクが大きくなると、収益率は増加する

リスク・プレミアム＝危険資産の収益率－安全資産の収益率

リスクが大きくなると、危険資産の収益率が高くなる ⇔ リスク・プレミアムが増加

米国での例：『コーポレート・ファイナンス』から

収益率の比較：

財務省証券(短期) < 米国長期国債 < 社債 < 株式(S&P500) < 小規模企業の株式

ポートフォリオ	収益率(名目%)	収益率(実質%)	平均リスク・プレミアム
財務省証券	3.8	0.7	0
長期国債	5.6	2.6	1.8
社債	6.1	3	2.3
株式(S&P500)	13	9.7	9.2
小規模企業株式	17.7	14.2	13.9

主要企業の株式は、財務省証券に対して、リスク・プレミアムが 9.2%

⇒ 投資が求めるリスク・プレミアムは、現在、6～8.5%程度

確率変数間の相関：確率変数 x 、 y

x の期待値 $\bar{x} \equiv E[x]$ 、 x の分散 $\sigma_x^2 \equiv Var(x) \equiv E[(x - \bar{x})^2]$

y の期待値 $\bar{y} \equiv E[y]$ 、 y の分散 $\sigma_y^2 \equiv Var(y) \equiv E[(y - \bar{y})^2]$

x と y の共分散(covariance) $\sigma_{xy} \equiv Cov(x, y) = E[(x - \bar{x})(y - \bar{y})]$

共分散の計算式 $\sigma_{xy} = \text{Cov}(x, y) = E[xy] - \bar{x}\bar{y}$

$\sigma_{xy} > 0$ のとき、 x が上昇すれば、 y も上昇する傾向がある

$\sigma_{xy} < 0$ のとき、 x が上昇するならば、 y は減少する傾向がある

$\sigma_{xy} = 0$ のとき、 x と y の変化には何の関係もない

相関係数の定義： $\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$ 、 $|\rho_{xy}| \leq 1$

確率変数 x と y の和の期待値 $E[x + y] = E[x] + E[y] = \bar{x} + \bar{y}$

和の分散 $\text{Var}(x + y) = E[\{(x + y) - (\bar{x} + \bar{y})\}^2] = \sigma_x^2 + 2\sigma_{xy} + \sigma_y^2$

互いに無相関の時、 $\text{Var}(x + y) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$

相関係数が 1 のとき、 $\text{Var}(x + y) = (\sigma_x + \sigma_y)^2$

相関係数が -1 のとき、 $\text{Var}(x + y) = |\sigma_x - \sigma_y|^2$

例：サイコロを 2 回振り、出た目の平均を z とする。

1 回目の数 = x 、2 回目の数 = y 、 $z = \frac{x + y}{2}$

$$\bar{x} \equiv E[x] = \frac{1}{6}(1 + 2 + \cdots + 6) = 3.5 = \bar{y}$$

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - \bar{x}^2 = \frac{1}{6}(1 + 4 + \cdots + 36) - 3.5^2 = 2.92 = \sigma_y^2$$

z の期待値 = $E[(x + y)/2] = (\bar{x} + \bar{y})/2 = 3.5$

x と y が独立である事実を用いると、

$$z \text{ の分散} = \text{Var}\left(\frac{x + y}{2}\right) = \text{Var}(x/2) + \text{Var}(y/2) = \frac{\sigma_x^2}{2} < \sigma_x^2$$

相関係数の例：トヨタ自動車と麒麟ビールの株式のデータが以下の表で与えられている。

	麒麟ビール	トヨタ自動車	$(x-E_x)(y-E_y)$
1月	-0.0215	-0.0033	-0.000101
2月	-0.0028	0.0131	-0.000762
3月	-0.0121	0.1065	0.000638
4月	-0.0274	-0.0117	0.000247
5月	0.0444	-0.0472	-0.006595
6月	0.0284	0.1858	0.007031
7月	-0.0221	0.0548	0.000006
8月	-0.0621	-0.2005	0.009697
9月	-0.0414	0.0495	0.000010
10月	-0.0635	0.0649	-0.000594
11月	-0.0117	-0.0416	-0.001073
12月	-0.0890	0.4306	-0.024962
期待値	-0.0234	0.0501	-0.001372
標準偏差(標本)	0.0362	0.1459	
相関係数	-0.2598		-0.259760

$$\sigma_{xy} = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] = -0.001372$$

$$\text{相関係数 } \rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = -0.2598$$

Excel での計算：すべて標本分散と標本共分散の計算式に基づく

共分散の計算：COVAR 関数、相関係数の計算：CORREL 関数

分散投資によるリスクの低下：

分散化によって潜在的に取り除くことが可能なリスク＝個別リスク

分散化によって避けることができないリスク＝市場リスク

適切に分散化されたポートフォリオのリスク＝市場リスクのみからなる

各株価は全株価の市場平均の変動と同様な動きをする

2社の銘柄から構成されるポートフォリオ：

A 社株の収益率 r_A 、A 社株の期待収益率 $\bar{r}_A = E[r_A]$ 、A 社株の標準偏差 $= \sigma_A$ 、

B 社株の収益率 r_B 、B 社株の期待収益率 $\bar{r}_B = E[r_B]$ 、B 社株の標準偏差 $= \sigma_B$

A 社株の保有割合を x_A 、B 社株のそれを x_B とするとき、

ポートフォリオの収益率 $r = x_A r_A + x_B r_B$

期待収益率 $\mu = E[x_A r_A + x_B r_B] = x_A E[r_A] + x_B E[r_B] = x_A \bar{r}_A + x_B \bar{r}_B$

分散 $\sigma^2 = E\{x_A r_A + x_B r_B - (x_A \bar{r}_A + x_B \bar{r}_B)\}^2 = E\{x_A (r_A - \bar{r}_A) + x_B (r_B - \bar{r}_B)\}^2]$

$$= x_A^2 \text{Var}(r_A) + x_B^2 \text{Var}(r_B) + 2x_A x_B E[(r_A - \bar{r}_A)(r_B - \bar{r}_B)]$$

$$E[(r_A - \bar{r}_A)(r_B - \bar{r}_B)] = \text{Cov}(r_A, r_B) = \sigma_{AB} \quad \text{A 社株と B 社株の共分散}$$

よって、
$$\sigma^2 = x_A^2 \sigma_A^2 + x_B^2 \sigma_B^2 + 2x_A x_B \sigma_{AB}$$

相関係数 ρ_{AB} の定義を用いると、 $\text{Cov}(r_A, r_B) = \sigma_{AB} = \rho_{AB} \sigma_A \sigma_B$
 ポートフォリオの収益率の分散は

$$\sigma^2 = x_A^2 \sigma_A^2 + x_B^2 \sigma_B^2 + 2x_A x_B \rho_{AB} \sigma_A \sigma_B$$

A 社と B 社の相関係数が 1 以下のとき、

$$\sigma^2 = x_A^2 \sigma_A^2 + x_B^2 \sigma_B^2 + 2x_A x_B \rho_{AB} \sigma_A \sigma_B < (x_A \sigma_A + x_B \sigma_B)^2$$

リスクが減少する

例：

資産 1 の収益率の期待値は $\bar{r}_1 = 0.12$ 、標準偏差は $\sigma_1 = 0.20$

資産 2 の収益率の期待値は $\bar{r}_2 = 0.15$ 、標準偏差は $\sigma_2 = 0.18$

共分散は $\sigma_{12} = 0.01$

ポートフォリオでの保有割合は $w_1 = 0.25$, $w_2 = 0.75$

ポートフォリオの収益率の期待値は $\bar{r} = 0.25 \cdot 0.12 + 0.75 \cdot 0.15 = 0.1425$

その分散は
$$\sigma^2 = (0.25)^2 (0.20)^2 + 2(0.25)(0.75)(0.01) + (0.75)^2 (0.18)^2 = 0.024475$$

よって $\sigma = 0.1564$

ポートフォリオの分散は個別資産の分散より小さい

ポートフォリオでの保有割合を $w_1 = 0.5$, $w_2 = 0.5$ に変化させるとどうなるか？

分散化投資の例：

ブリストル・マイヤーズ社の株：期待収益率＝10%、標準偏差＝17.1%

マクドナルド社の株：期待収益率＝20%、標準偏差＝20.8%

ブリストル・マイヤーズ社の株を 55%、残りをマクドナルド社の株に投資する

ポートフォリオの期待収益率 $= x_A \bar{r}_A + x_B \bar{r}_B = 0.55 \times 10 + 0.45 \times 20 = 14.5\%$

ポートフォリオの分散

$$\sigma^2 = x_A^2 \sigma_A^2 + x_B^2 \sigma_B^2 + 2x_A x_B \rho_{AB} \sigma_A \sigma_B = x_A^2 (17.1)^2 + x_B^2 (20.8)^2 + 2x_A x_B \rho_{AB} \times 17.1 \times 20.8$$

両者株の相関係数＝0.15 のとき

分散
$$\sigma^2 = (0.55)^2 (17.1)^2 + (0.45)^2 (20.8)^2 + 2 \times 0.55 \times 0.45 \times 0.15 \times 17.1 \times 20.8 = 202.5$$

標準偏差 $= \sqrt{202.5} = 14.2$

ポートフォリオの分散は、両者の個別株式の分散よりも小さい

両者株の相関係数＝－1 のとき

ポートフォリオの分散

$$\sigma^2 = x_A^2 \sigma_A^2 + x_B^2 \sigma_B^2 - 2x_A x_B \sigma_A \sigma_B = (0.55 \times 17.1 - 0.45 \times 20.8)^2 = 0.045^2$$

保有比率を変化させて、分散をゼロにすることができる；完全にリスクを取り除く

3社の銘柄から構成されるポートフォリオ：

j 社株の収益率 = r_j 、A 社株の期待収益率 = $\bar{r}_j = E[r_j]$ 、j 社株の標準偏差 = σ_j 、 $j = 1, 2, 3$

j 社株の保有割合を x_j ： $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

ポートフォリオの収益率 = $r = \sum_{j=1}^3 x_j r_j$

$$\text{期待収益率} = \bar{r} = E\left[\sum_{j=1}^3 x_j r_j\right] = \sum_{j=1}^3 x_j \bar{r}_j$$

$$\begin{aligned} \text{分散} \quad \sigma^2 &= \text{Var}(r) = E\left[\left(\sum_{j=1}^3 x_j r_j - \sum_{j=1}^3 x_j \bar{r}_j\right)^2\right] = E\left[\{x_1(r_1 - \bar{r}_1) + x_2(r_2 - \bar{r}_2) + x_3(r_3 - \bar{r}_3)\}^2\right] \\ &= \underline{x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + x_3^2 \sigma_3^2 + 2x_1 x_2 \sigma_{12} + 2x_1 x_3 \sigma_{13} + 2x_2 x_3 \sigma_{23}} \end{aligned}$$

N社の株式からなるポートフォリオ

j 社株の収益率 = r_j 、A 社株の期待収益率 = $\bar{r}_j = E[r_j]$ 、j 社株の標準偏差 = σ_j 、 $j = 1, 2, \dots, N$

j 社株の保有割合を x_j

ポートフォリオの収益率 = $r = \sum_{j=1}^N x_j r_j$

$$\text{期待収益率} = \bar{r} = E\left[\sum_{j=1}^N x_j r_j\right] = \sum_{j=1}^N x_j \bar{r}_j$$

$$\text{分散} = E\left[\left(\sum_{j=1}^N x_j r_j - \sum_{j=1}^N x_j \bar{r}_j\right)^2\right] = E\left[\sum_{j=1}^N x_j (r_j - \bar{r}_j)^2\right] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij}$$

例 1：各会社の株の収益率が同一で $\bar{r}$ 、分散が σ^2 で、互いに相関していない

また、各会社株の保有割合が均等なとき、つまり、 $x_j = 1/N$ のとき

$$\text{ポートフォリオの収益率の平均値} \quad \mu = E\left[\sum_{j=1}^N x_j r_j\right] = \sum_{j=1}^N \frac{\bar{r}}{N} = \bar{r}$$

$$\text{収益率の分散} = \sum_{j=1}^N \frac{\sigma_j^2}{N^2} = \sum_{j=1}^N \frac{\sigma^2}{N^2} = \frac{\sigma^2}{N}, \quad (\sigma_{ij} = 0, i \neq j)$$

Nが増大するにつれて、分散はゼロに近づく

例 2：各会社の株の収益率が同一で $\bar{r}$ 、分散が σ^2 で、各会社株の保有割合が均等なとき、
 $x_j = 1/N$

各株の相関係数が ρ であるとき、つまり、 $\sigma_{ij} = \rho\sigma_i\sigma_j, i \neq j : \sigma = \sigma_i$ なので $\sigma_{ij} = \rho\sigma^2$

$$\text{収益率の分散} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} = \frac{1}{N^2} \left\{ \sum_{j=1}^N \sigma^2 + \sum_{j \neq i} \sum_{i=1}^N \sigma_{ij} \right\} = \frac{1}{N^2} \{ N\sigma^2 + (N^2 - N)\rho\sigma^2 \}$$

よって、

$$\text{収益率の分散} = \frac{\sigma^2}{N} + (1 - \frac{1}{N})\rho\sigma^2 = \rho\sigma^2 + (1 - \rho)\frac{\sigma^2}{N}$$

Nが増大するにつれて、第2項はゼロに近づく、第1項だけが残る

第1項＝各株間の共分散

収益率の分散は共分散（の平均）に収束

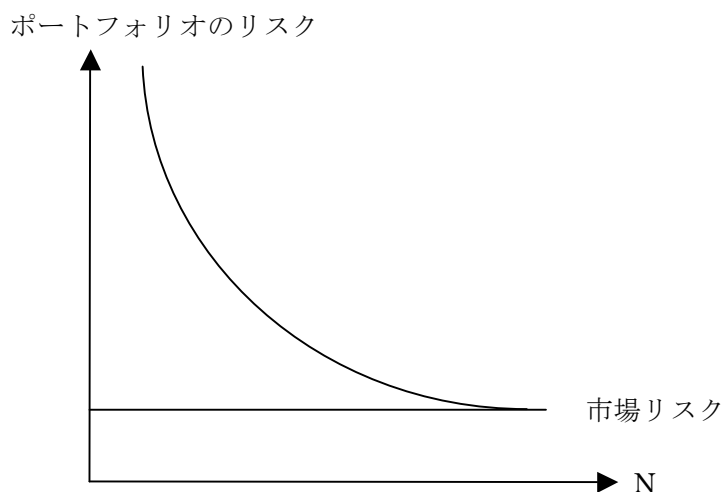
各株式は似たような動きをする $\Rightarrow$ 共分散の平均はゼロではない

$\Rightarrow$ リスクをゼロとするポートフォリオ構成は不可能

市場に残るリスク = 市場リスクという

結論：

十分に分散化されたポートフォリオのリスクは、含まれている証券の市場リスクに依存する



個々の証券のリスクはポートフォリオのリスクにどのように影響するのか？

個々の証券のリスクはベータ(β)によって表される

ベータ(β)は市場平均の変動に対する感応度を測っている

株価が市場平均で1%上昇するとき、GEの株価が1.2%上昇するならば、

GE株のベータ(β)は1.2という

⇒ ベータが1を超える株式は、市場全体の動きを増幅させる傾向を持つ

0から1の間の株式は、市場と同方向に変化するが、市場ほど変化の度合いは大きくない

十分に分散化されたポートフォリオのリスクはポートフォリオのベータに比例する

3.3 ポートフォリオ理論

空売り(short selling)

自分が所有していない資産を売ること

= その資産を所有している人から資産を借りて、第3者に売却して、後日この資産を買い戻して、それを借り手に返却する

借りた資産を売却するときの価格が X_0

後日買い戻すときの価格が X_1 のとき

$X_0 > X_1$ であれば、利益が出る

現在での投資額 = $-X_0$ (売却益だから、マイナスの投資)

後日の収益額 = $-X_1$ (支出だから、マイナスの収入)

したがって、空売りによる収益率 $r = \frac{-X_1 - (-X_0)}{-X_0} = \frac{X_1 - X_0}{X_0}$

空売りの利益 = $-X_0 \times r$

例:

現在の株価 = 1株1万円、

A社の株を100株をブローカーから借りて、空売りする

1年後に株価が9千円に下がった

このとき、100株を買い戻し、この株をブローカーに返済した

この空売りの収益率 = $\frac{9000 - 10000}{10000} = -0.1$

よって、空売りからの収益 = $(-0.1) \times (-10000) = 1000$ 円

ポートフォリオの収益率の平均と分散

n 個の資産のランダムな収益率を $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ 、その期待値を $\{\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n\}$

個別資産 i の保有割合を x_i 、 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$

ポートフォリオの収益率は $r = x_1 r_1 + x_2 r_2 + \dots + x_n r_n$

この期待値 $\bar{r} = E(r) = x_1 \bar{r}_1 + x_2 \bar{r}_2 + \dots + x_n \bar{r}_n$

個別資産 i の収益率の分散を σ_i^2 、資産 i と資産 j の収益率の共分散を σ_{ij}^2

$$\text{ポートフォリオの収益率の分散} \quad \sigma^2 = \text{Var}(r) = \sum_{i=1, j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} \quad (\sigma_{ii}^2 = \sigma_i^2)$$

2 種の下資産からなるポートフォリオのケース：

$$\text{ポートフォリオの収益率の期待値} \quad r = x_1 r_1 + x_2 r_2, \quad x_1 + x_2 = 1$$

$$\text{分散} \quad \sigma^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + 2x_1 x_2 \sigma_{12} + x_2^2 \sigma_2^2$$

下資産の保有比率 (x_1, x_2) を変化させると、期待値と分散が変化する

ポートフォリオの期待値と分散の移動する領域：実行可能領域

$$x_1 = \alpha \text{ とすると、 } x_2 = 1 - \alpha$$

$$\text{ポートフォリオの期待値} \quad \bar{r} = \alpha \bar{r}_1 + (1 - \alpha) \bar{r}_2$$

$$\text{分散} \quad \sigma^2 = \alpha^2 \sigma_1^2 + 2\alpha(1 - \alpha) \sigma_{12} + (1 - \alpha)^2 \sigma_2^2 = \alpha^2 \sigma_1^2 + 2\alpha(1 - \alpha) \rho \sigma_1 \sigma_2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_2^2$$

相関係数が 1 のとき、

$$\sigma = \sqrt{\alpha^2 \sigma_1^2 + 2\alpha(1 - \alpha) \sigma_1 \sigma_2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_2^2} = \alpha \sigma_1 + (1 - \alpha) \sigma_2$$

標準偏差と期待値の平面上で、下資産に対応する点 1 $(\sigma_1, \bar{r}_1)$ 、点 2 $(\sigma_2, \bar{r}_2)$

ポートフォリオの標準偏差と期待値の領域は点 1 と点 2 を結ぶ直線

$$\begin{bmatrix} \bar{r} \\ \sigma \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \sigma_1 \end{bmatrix} + (1 - \alpha) \begin{bmatrix} \bar{r}_2 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}$$

相関係数が -1 のとき、

$$\sigma = \sqrt{\alpha^2 \sigma_1^2 - 2\alpha(1 - \alpha) \sigma_1 \sigma_2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_2^2} = |\alpha \sigma_1 - (1 - \alpha) \sigma_2|$$

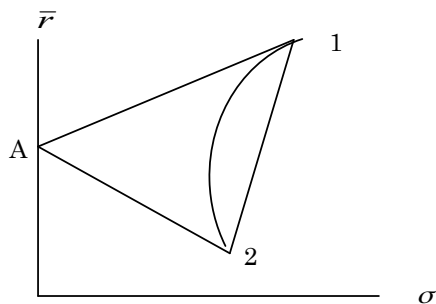
$$\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \quad \text{のとき、分散はゼロ} \Rightarrow \text{点 A } (0, \frac{\bar{r}_1 \sigma_1 + \bar{r}_2 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2})$$

$$\alpha < \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \quad \text{ならば、} \sigma = -\alpha \sigma_1 + (1 - \alpha) \sigma_2$$

$$\alpha > \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \quad \text{ならば、} \sigma = \alpha \sigma_1 - (1 - \alpha) \sigma_2$$

ポートフォリオの標準偏差と期待値の領域は

点 A と点 1 を結ぶ直線上と、点 A と点 2 を結ぶ直線上



相関係数が 1 と -1 の間にあるとき、 $-1 < \rho < 1$ のとき

2 次曲線となる

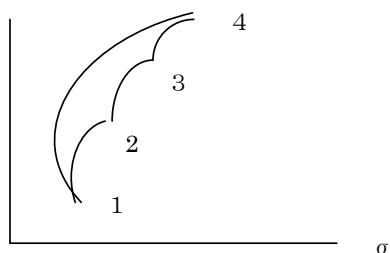
証明： $\bar{r} = \alpha \bar{r}_1 + (1 - \alpha) \bar{r}_2$ より、 $\alpha = \frac{\bar{r} - \bar{r}_2}{\bar{r}_1 - \bar{r}_2}$

これを分散の式に代入すると、

$$\sigma^2 = \alpha^2 \sigma_1^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\rho\sigma_1\sigma_2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_2^2 = (\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)\alpha^2 + 2(\rho\sigma_1 - \sigma_2)\alpha + \sigma_2^2$$

より、右辺は期待値の 2 次関数となる。

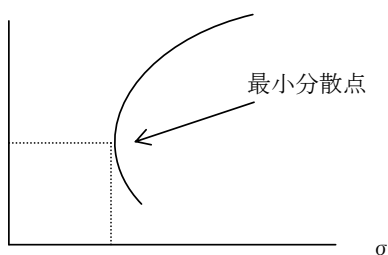
互いの相関関係が $-1 < \rho < 1$ のとき、2 資産からなるポートフォリオの収益率の期待値と標準偏差の実行可能領域は左側に凸な 2 次曲線に類似した曲線となる



最小分散集合：実行可能領域の左端の境界

与えられた期待値の下で、分散が最小になるポートフォリオの集合

最小分散点 (minimum variance point: MVP)：最小分散集合の中で分散が最小となる点



効率的フロンティア：最小分散集合の最小分散点よりも上側の領域

下側の領域では、同じ分散で、より小さい期待値の収益率となる

⇒ 大半の投資家は、効率的なフロンティア上のポートフォリオを対象とする

リスク・フリー資産が存在するとき

ポートフォリオにリスク・フリー資産を組み込むとき

リスク・フリー資産：国債などを想定、収益率 $=r_f$ (=期待値)、分散 $=\sigma_f=0$

リスク資産：収益率 r_1 、期待値 $=\bar{r}_1$ 、分散 $=\sigma_1$

リスク・フリーの分散はゼロだから、リスク・フリー資産とリスク資産との相関係数はゼロ

リスク・フリー資産の保有割合 $=\alpha$ とする

ポートフォリオの収益率の期待値 $=\alpha r_f + (1-\alpha)\bar{r}_1$

$$\text{標準偏差} = \sqrt{\alpha^2 \sigma_f^2 + 2\alpha(1-\alpha)\rho\sigma_f\sigma_1 + (1-\alpha)^2\sigma_1^2} = 0 + (1-\alpha)\sigma_1 = \alpha\sigma_f + (1-\alpha)\sigma_1$$

よって、
$$\begin{bmatrix} \bar{r} \\ \sigma \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} r_f \\ \sigma_f \end{bmatrix} + (1-\alpha) \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \sigma_1 \end{bmatrix}$$

このポートフォリオの実行可能領域は

リスク・フリー資産の点 F(0, r_f) とリスク資産の点 1($\sigma_1, \bar{r}_1$) を結ぶ直線

空売りの存在：マイナスの保有比率を認める

3.4 期待効用理論と平均・分散アプローチ

行為 a を選択するとき、3 種類の状態が起こるとする

各状態が起こる確率を $\{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m\}$ 、この時、得られる利得は $\{c_{a1}, c_{a2}, \dots, c_{am}\}$

行為 a のプロスペクト $a = (c_{a1}, c_{a2}, \dots, c_{am}; \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)$ 、くじ (lottery) とも言う

行為 a はプロスペクト a を持つくじを引くことと同じ

期待効用仮説：the Neuman-Morgenstern Expected-utility Rule

プロスペクト a を持つ行為を選んだときの効用水準 $U(a)$ は

$$U(a) = Eu(a) = \pi_1 u(c_{a1}) + \pi_2 u(c_{a2}) + \dots + \pi_m u(c_{am})$$

で計算できる

行為 a の効用 = 行為 a が引起す各状態の利得に対応した効用値を生起確率を重みとして計算した平均値

例：太郎君の効用関数が $u(c) = \left(\frac{c}{100}\right)^{1/2}$ (単位：万円)

200 円払うと、コインの表が出るときは 400 円もらえ、裏が出るとは何ももらえない。コインの表が出る確率を 0.5 である

この賭けに参加するときのプロスペクトは

$$a = (400, 0; 0.5, 0.5)$$

$$\text{賭けに参加するときの期待利得} = E(a) = 0.5 \cdot 400 + 0.5 \cdot 0 = 200 \text{ 円}$$

$$\text{賭けに参加するときの期待効用} = Eu(a) = 0.5u(400) + 0.5u(0) = 0.5\sqrt{4} = 1$$

$$\text{賭けに参加しないときの効用} = \text{確実な 200 円の効用} = u(200) = \sqrt{2}$$

賭けに参加するときの期待効用 < 参加しないときの効用

⇒ 太郎君は賭けに参加しないでしょう

くじ b = 確率 0.1 で 81 万円、確率 0.5 で 36 万円、確率 0.4 で 16 万円が当たる

くじ b は 25 万円で買える

$$\text{くじ b のプロスペクト} = (81, 36, 16; 0.1, 0.5, 0.4)$$

明らかに

$$u(81) = 0.9, u(36) = 0.6, u(16) = 0.4$$

$$\text{賭けに参加するときの期待効用} = 0.1u(81) + 0.5u(36) + 0.4u(16) = 0.55$$

$$\text{確実な 25 万の効用} = u(25) = 0.5$$

くじ b の期待効用 > 25 万円の効用

⇒ 太郎君はくじ b を買うでしょう

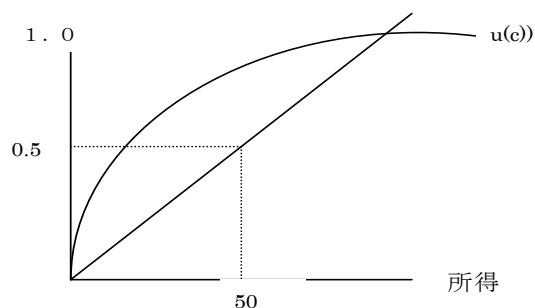
例：上記の例で使用された基礎的効用関数 $u(c) = (\frac{c}{100})^{1/2}$

$$\text{くじ } x = (100, 0; 0.5, 0.5) \text{ の期待効用値 } Eu(x) = 0.5u(100) + 0.5u(0) = 0.5$$

$$Ex = 50 = \bar{x}$$

$$u(\bar{x}) = u(50) = 1/\sqrt{2} > 0.5$$

よって、この主体は、危険回避的である、 $Eu(x) < u(\bar{x})$



$Eu(x) = u(x^c)$ となるようなリスクなしの利得 x^c をくじ x の確実性等価額という

⇒ 危険回避的であるときは常に、 $x^c < \bar{x}$

$\bar{x} - x^c = \text{リスク・プレミアム (risk premium)}$ という

予想される生起状態が 2 種類するとき、ある行為の結果プロスペクトは $c = (c_1, c_2; \pi_1, \pi_2)$

期待効用は $U(c) = Eu(c) = \pi_1 u(c_1) + \pi_2 u(c_2)$, $\pi_1 + \pi_2 = 1$

効用値を一定にするときの、 (c_1, c_2) の組合せはいわゆる無差別曲線

$$dU = \pi_1 u'(c_1) dc_1 + \pi_2 u'(c_2) dc_2 = 0$$

無差別曲線の接線の勾配は

$$M(c_1, c_2) = -\frac{dc_2}{dc_1} = \frac{\pi_1 u'(c_1)}{\pi_2 u'(c_2)}$$

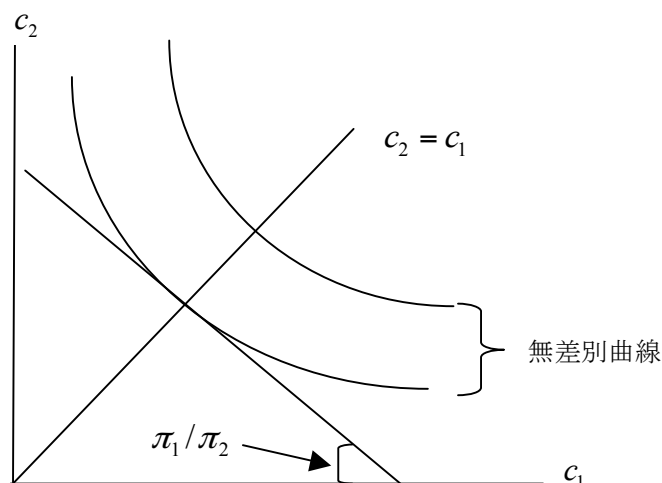
確実なケース：状態 1 が生起したときと、状態 2 が生起したときとで同じ利得

⇒ $c_1 = c_2$ 確実なケースは 45 度線上に対応

45 度線上で、無差別曲線の勾配は $= \frac{\pi_1}{\pi_2}$

危険回避的な主体の無差別曲線は原点に対して凸

$u'' < 0$ という条件から説明できる



3.6 平均 - 分散アプローチ

くじの利得 (確率変数) = $\tilde{c}$

状態空間が離散的ケース：状態の確率分布 $= \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m\}$, $\sum_{j=1}^m \pi_j = 1$

状態が j となるときの利得は c_j ($j = 1, 2, \dots, m$)

状態空間が連続変数のケース：状態の確率分布 $F(x)$ 、確率密度分布 $f(x)$

状態が x のときの利得 $c = c(x)$

von Neumann-Morgenstern 効用関数 $= u(c)$

$$\Leftrightarrow \text{くじ } c \text{ の期待効用 } U(c) = \sum_{i=1}^n \pi_i u(c_i) ; U(c) = \int_0^\infty u(c) f(c) dc$$

期待効用は確率分布に依存：確率分布はすべてのモーメントにより記述される

⇒ 期待効用の計算は一般的に確率分布の全モーメントを必要とする

特殊ケース：

① 分布が正規分布であるとき、確率分布は平均値と分散だけで記述される

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad ; \quad \mu = Ex, \sigma = \sqrt{Var(x)}$$

$$u(c) = 1 - e^{-c} \text{ なる効用関数のとき、} EU(c) = 1 - \exp\left\{-\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\}$$

しかし、経済データは有限値、価格に負の値はない ⇔ 現実性の問題

② 効用関数が 2 次関数であるとき、例えば、 $u(c) = c - \frac{1}{120}c^2$ のとき

分布が区間 $[0, 60]$ になければいけない ⇔ 現実性の問題

この特殊ケースのとき、期待効用は平均値と分散だけに依存する

期待効用が平均値と分散だけに依存するケース：平均・分散アプローチ

① 危険回避的な人：危険度（分散）が増加するに連れてより大きな期待収益を要求する

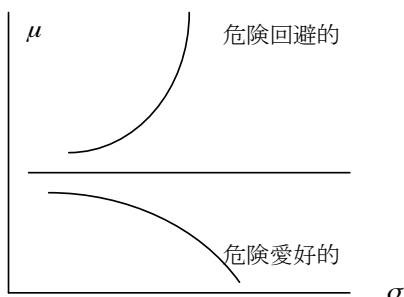
⇒ 無差別曲線は、(平均値、標準偏差) 平面上で右上がり

② 危険中立的な人：危険度（分散）に依存せず期待収益が大きいことを望む

⇒ 無差別曲線は、(平均値、標準偏差) 平面上で水平な直線

③ 危険愛好的な人：危険度（分散）が増加するに連れてより小さな収益を要求する

⇒ 無差別曲線は、(平均値、標準偏差) 平面上で右下がり



2 種類の金融資産のケース：

資産 1 は安全資産、収益は確定値 z_1 ⇒ $\mu_1 = z_1, \sigma_1 = 0$

資産 2 は危険資産、収益は確率変数 z_2 ⇒ $\mu_2 = E[z_2], \sigma_2 = E[(z_2 - \mu_2)^2]$

資産 1 と資産 2 の保有量をそれぞれ、 q_1, q_2

資産 1 と資産 2 の市場価格をそれぞれ、 P_1, P_2

初期での富の総額を $\bar{W}$

予算制約式は $P_1 q_1 + P_2 q_2 = \bar{W}$

ポートフォリオからの収益 $= c = q_1 z_1 + q_2 z_2$ (確率変数となる)
 予算制約式から、 $q_1 = (\bar{W} - P_2 q_2) / P_1$

収益の式に代入すると、 $c = (\bar{W} - P_2 q_2) z_1 / P_1 + q_2 z_2$

資産 1 の収益率は $R_1 = \frac{z_1}{P_1} - 1$

よって、

$$c = (\bar{W} - P_2 q_2)(1 + R_1) + q_2 z_2$$

確率変数 c の平均値と標準偏差は

$$\mu = \bar{W}(1 + R_1) + [\mu_2 - (1 + R_1)P_2]q_2$$

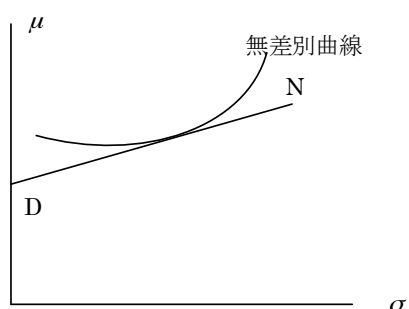
$$\sigma = \sigma_2 q_2$$

これらの式から、

$$\mu = \bar{W}(1 + R_1) + [\mu_2 - (1 + R_1)P_2]\sigma / \sigma_2 \Rightarrow (\mu, \sigma) \text{ 平面上で直線}$$

安全資産のみを保有するとき、 $\mu = \bar{W}(1 + R_1), \sigma = 0 \Rightarrow D \text{ 点}$

危険資産のみを保有するとき、 $\mu = (\bar{W} / P_2)\mu_2, \sigma = (\bar{W} / P_2)\sigma_2 \Rightarrow N \text{ 点}$



$\vartheta = \frac{d\mu}{d\sigma}$: リスクの価格

通常安全資産の収益率は危険資産の収益率よりも小さいので、

$1 + R_1 < \mu_2 / P_2 \Rightarrow D \text{ 点は } N \text{ 点よりも左下に位置} \Rightarrow \text{直線 } DN \text{ は右上がり}$

危険資産の保有比率が上昇するにつれて、DN 線上を右上方に移動

最適なポートフォリオ：無差別曲線 ($U(c) = \text{一定}$) と直線 DN の接点で決定

4. 資本資産の評価モデル

4.1 市場均衡

N 種の危険資産から構成された危険資産のポートフォリオ：

j 社株の収益率 $= r_j$ 、 j 社株の期待収益率 $= \bar{r}_j$ 、 j 社株の標準偏差 $= \sigma_j$

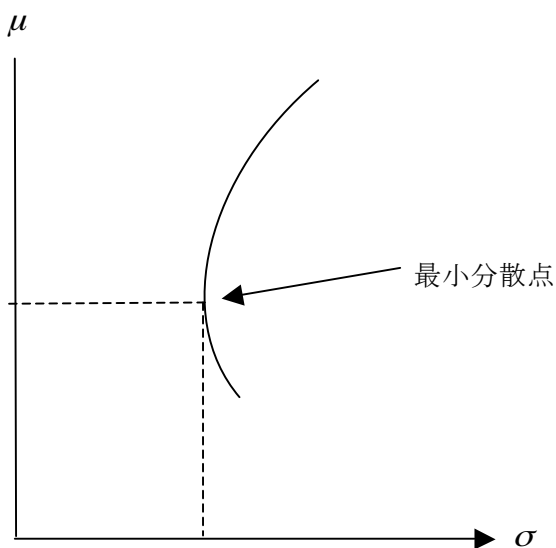
j 社株の保有割合 $= x_j$

⇨ ポートフォリオの収益率 $r = \sum_{j=1}^N x_j r_j$

期待収益率 $\mu = E[\sum_{j=1}^N x_j r_j] = \sum_{j=1}^N x_j \bar{r}_j$

分散 $\sigma^2 = E[(\sum_{j=1}^N x_j r_j - \sum_{j=1}^N x_j \bar{r}_j)^2] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij}$

このポートフォリオの最小分散集合：左に凸の形状



リスク・フリー資産が存在：国債などを想定、収益率 $= r_f$ (=期待値)、分散 $= \sigma_f^2 = 0$

危険資産のポートフォリオ A: 収益率 $= r_a$ 、期待値 $= \bar{r}_a$ 、分散 $= \sigma_a^2$ とする

危険資産 A と安全資産からなるポートフォリオ B：

リスク・フリー資産の保有割合 $= \alpha$ 、危険資産ポートフォリオ A の保有割合 $= 1 - \alpha$

ポートフォリオ B の収益率 $r = \alpha r_f + (1 - \alpha) r_a$

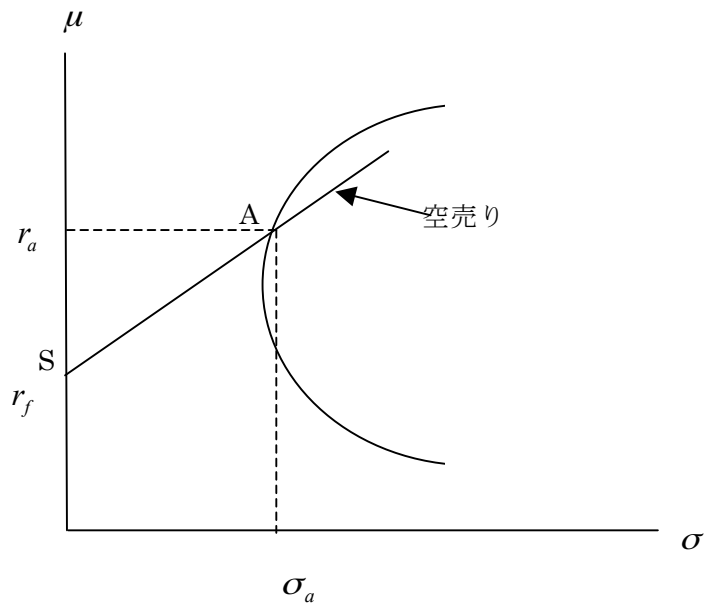
ポートフォリオ B の収益率の期待値 $\mu = \bar{r} = \alpha r_f + (1 - \alpha) \bar{r}_a$

分散 $\sigma^2 = E[(r - \mu)^2] = E[\{\alpha r_f + (1 - \alpha) r_a - (\alpha r_f + (1 - \alpha) \bar{r}_a)\}^2]$

$$\sigma = \sqrt{\alpha^2 \sigma_f^2 + 2\alpha(1-\alpha)\rho\sigma_f\sigma_a + (1-\alpha)^2 \sigma_a^2} = 0 + (1-\alpha)\sigma_a = \alpha\sigma_f + (1-\alpha)\sigma_a$$

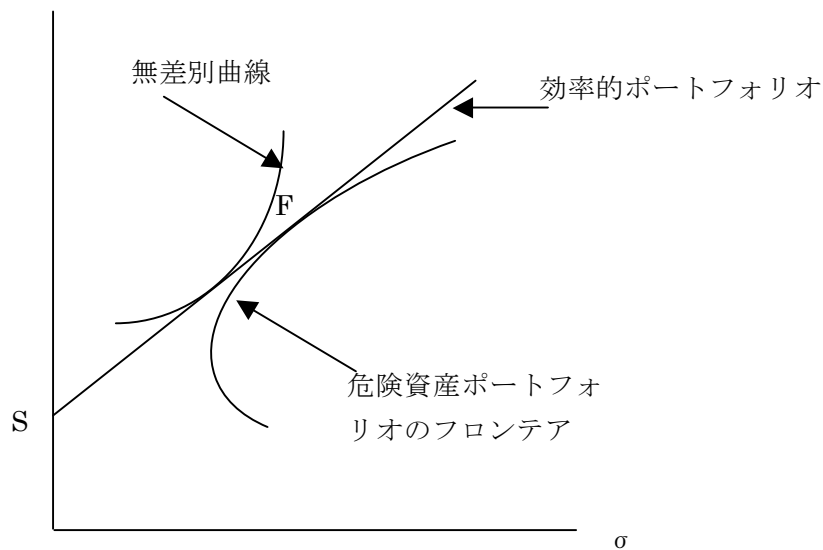
ポートフォリオ A の実現可能領域：リスク・フリー点と危険資産の点を結ぶ直線

$$\begin{bmatrix} \bar{r} \\ \sigma \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} r_f \\ 0 \end{bmatrix} + (1-\alpha) \begin{bmatrix} \bar{r}_a \\ \sigma_a \end{bmatrix}$$



$\alpha < 0$ のとき、安全資産の保有量 < 0 : 借りている、空売り
点 A の右側の領域

リスク・フリー点 S 点を通る直線と危険資産ポートフォリオの最小分散集合との接点：F
F 点に対応する危険資産のポートフォリオ ⇨ ファンド F とする



直線 SF：同一期待値で最小の分散を実現するポートフォリオ
⇨ 効率的なポートフォリオを構成

リスク・フリー資産と危険資産のファンドFから構成される
 直線 SF 上の各点：財務省証券(国債)と、危険資産ファンド F の組合せに投資することで実現
 F 点よりも右上の点：国債と同一金利で借り入れることで実現(国債へのマイナスの投資)

効率的な資産運用では、リスク・フリー資産と危険資産のファンドFを組み合わせて運用すればよい

- a. 危険資産ポートフォリオ F 以外の危険資産を保有する必要がない
 ポートフォリオ F 以外の危険資産を保有することは不合理である
- b. 直線 AF 上のどの点で資産運用を行うかは、各人の効用関数の形状に依存
 ⇒ 資産運用での分離定理という

例：危険資産のファンド F の期待収益率＝15%、標準偏差＝16%、財務省証券の金利＝5%

①資金の半分をポートフォリオ F に投資し、残りを財務省証券に投資するとき、

$$\text{期待収益率} = \frac{1}{2} \cdot 15 + \frac{1}{2} \cdot 5 = 10\%$$

$$\text{標準偏差} = \frac{1}{2} \cdot 16 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 8\%$$

②当初の投資額と同額を借り入れて(財務省証券の金利で)、すべてをポートフォリオ F に投資するとき、

$$\text{期待収益率} = 2 \cdot 15 - 1 \cdot 5 = 25\%$$

$$\text{標準偏差} = 2 \cdot 16 + 1 \cdot 0 = 32\%$$

危険資産のポートフォリオ F の特徴：ポートフォリオ F は市場平均ポートフォリオに一致する

仮定：

- ① 投資家は平均・分散モデルをもとに投資している
- ② すべての投資家はすべての資産について、期待収益率、分散、共分散に同じ値を想定している
- ③ 取引コストは存在しない

効率的なポートフォリオは安全資産とファンド F から構成

⇒ すべての投資家は各危険資産をポートフォリオ F に対応する比率で保有

市場均衡では、すべての投資家の各危険資産への需要量＝市場での供給量

⇒ 各危険資産のポートフォリオ F に含まれる比率＝市場での供給比率

よって、ポートフォリオ F は市場（平均）ポートフォリオに一致

ファンド F における各資産の重み＝市場ポートフォリオでの各資産の重み

＝各資産の市場価値額／すべての資産の総市場価値額

危険資産から構成される効率的なポートフォリオはファンド F のみである

ポートフォリオ F に含まれる危険資産 i の比率＜市場での供給比率のとき、

危険資産 i の価格が下落 $\Rightarrow$ 均衡するまで価格が下落し続ける
 ポートフォリオ F に含まれる危険資産 i の比率 $>$ 市場での供給比率のとき、
 危険資産 i の価格が上昇 $\Rightarrow$ 均衡するまで価格が上昇し続ける

4.2 価格付けモデル (CAPM)

効率的なポートフォリオ集合：

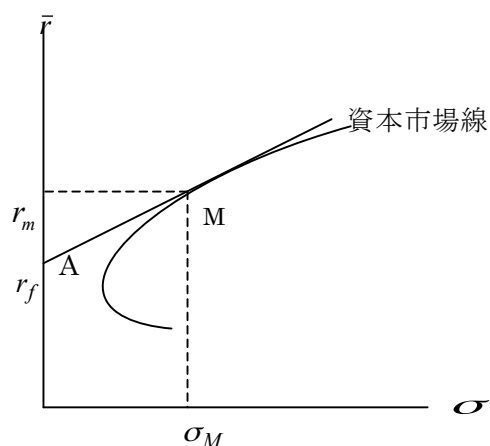
リスク・フリー点 (A 点) と市場平均ポートフォリオ点 (M 点) を結ぶ直線：資本市場線 (Capital Market Line) と言う

市場ポートフォリオの期待収益率 $= \bar{r}_M$ 、標準偏差 $= \sigma_M$

安全資産の収益率 $= r_f$ とおくと

効率的なポートフォリオの期待収益率 $= \bar{r}$ 、標準偏差 $= \sigma$

資本市場線の方程式：
$$\bar{r} = r_f + \frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M} \sigma$$



資本市場線の勾配 $= \frac{(\bar{r}_M - r_f)}{\sigma_M}$ リスクの価格 (price of risk)

ポートフォリオのリスクが 1 単位増加するとき要求される期待収益率の増加分

資本資産価格付けモデル (CAPM)

市場平均ポートフォリオ M が効率的であるならば、資産 i の期待収益率 $\bar{r}_i$ は

$$\bar{r}_i = r_f + \beta_i (\bar{r}_M - r_f)$$

で与えられる。ただし、

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} \quad \text{資産のベータ値という}$$

証明：個別資産 i と市場平均ポートフォリオ M から構成されるポートフォリオを作成

資産 i の期待収益率 $= \bar{r}_i$ 、分散 $= \sigma_i^2$ ；

市場平均ポートフォリオ M の期待収益率 = $\bar{r}_M$ 、分散 σ_M^2

資産 i の保有割合 $x_1 = \alpha$ とすると、市場ポートフォリオの保有割合 $x_2 = 1 - \alpha$

ポートフォリオの期待値 $\bar{r} = \alpha \bar{r}_i + (1 - \alpha) \bar{r}_M$

分散 $\sigma^2 = \alpha^2 \sigma_i^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_{iM} + (1 - \alpha)^2 \sigma_M^2$

よって、 $\frac{d\bar{r}}{d\alpha} = \bar{r}_i - \bar{r}_M$ 、 $2\alpha \frac{d\sigma}{d\alpha} = 2\alpha \sigma_i^2 + 2(1 - 2\alpha)\sigma_{iM} + 2(\alpha - 1)\sigma_M^2$

$$\therefore \left. \frac{d\sigma}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{\sigma_{iM} - \sigma_M^2}{\sigma_M} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\bar{r}}{d\alpha} = \frac{d\bar{r}/d\alpha}{d\sigma/d\alpha} = \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_M}{\sigma_{iM} - \sigma_M^2} \sigma_M$$

個別資産 i と市場平均ポートフォリオ M からなるポートフォリオの集合は、点 M で資本市場線に接する

$$\Leftrightarrow \frac{d\bar{r}}{d\alpha} = \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_M}{\sigma_{iM} - \sigma_M^2} \sigma_M = \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_M}{\sigma_M}$$

これより

$$\bar{r}_i - r_f = \frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M^2} \sigma_{iM} = \beta_i (\bar{r}_M - r_f)$$

(証明：終り)

$\bar{r}_i - r_f$ = 個別資産 i の期待超過収益率(リスク・プレミアム)

$\bar{r}_M - r_f$ = 市場ポートフォリオの期待超過収益率(リスク・プレミアム)

個別資産の期待超過収益率は市場ポートフォリオの期待超過収益率に比例し、その比例係数はベータで与えられる

危険資産の期待リスク・プレミアム = ベータ値 × 市場のリスク・プレミアム

例：安全資産の金利 = 8%、市場ポートフォリオの期待収益率 = 12%、標準偏差 = 15%

ある金融資産の市場ポートフォリオとの共分散 = 0.045 のとき、

この資産のベータ値 = $\sigma_{iM} / \sigma_M^2 = 0.045 / 0.15^2 = 2.0$

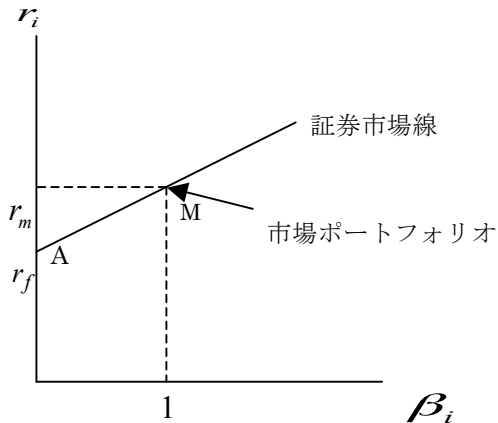
期待収益率 = $r_f + \beta(\bar{r}_M - r_f) = 0.08 + 2.0 \cdot (0.12 - 0.08) = 0.16$

例：米国財務省証券の金利 = 5.5%、市場ポートフォリオの期待リスク・プレミアム = 8% のとき

AT&T：ベータ値 = 0.65、→ 期待収益率 = $5.5 + 0.65 \cdot 8.0 = 10.7\%$

コカ・コーラ：ベータ値 = 0.98、→ 期待収益率 = $5.5 + 0.98 \cdot 8.0 = 13.3\%$

マイクロソフト：ベータ値=1.26、→ 期待収益率= $5.5 + 1.26 \cdot 8.0 = 15.6\%$



ポートフォリオのベータ値：

n 種の危険資産から構成、j 社株の標準偏差 = σ_j 、j 社株の保有割合を x_j

$$\text{ポートフォリオの収益率} = r = \sum_{j=1}^N x_j r_j$$

$$\text{市場ポートフォリオとの共分散は } \text{Cov}(r, r_M) = \sum_{i=1}^N x_i \text{Cov}(r_i, r_M)$$

$$\text{よって、} \beta = \frac{\text{Cov}(r, r_M)}{\sigma_M^2} = \sum_{i=1}^N x_i \text{Cov}(r_i, r_M) / \sigma_M^2 = \sum_{i=1}^N x_i \beta_i$$

ポートフォリオのベータ値は個別資産のベータ値を加重平均したもの

4.3 応用

例：ファンド分析

以下の表は ABC ミューチュアル・ファンドの成果を示す

計算 1：ABC ファンドの収益率のデータ $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ から平均収益率、標準偏差の計算

$$\text{平均収益率 } \bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i, \text{ 分散 } \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2$$

計算 2：S&P500 株平均を市場平均ポートフォリオとして、財務省短期証券を安全資産として採用、市場平均ポートフォリオの平均収益率と標準偏差、安全資産の平均収益率を計算する

市場平均ポートフォリオと ABC ファンドとの間の共分散とベータ値を計算する

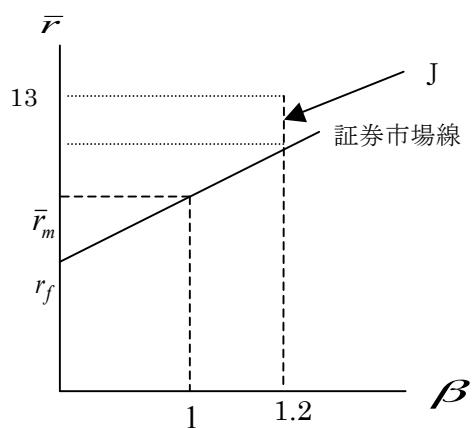
$$\text{cov}(r, r_M) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})(r_{Mi} - \bar{r}_M)$$

$$\beta = \text{cov}(r, r_M) / \text{var}(r_M)$$

計算 3：ジェンセンの指標の計算

式 $\bar{r} - r_f = J + \beta(\bar{r}_M - r_f)$ に当てはめ、J の値を求める

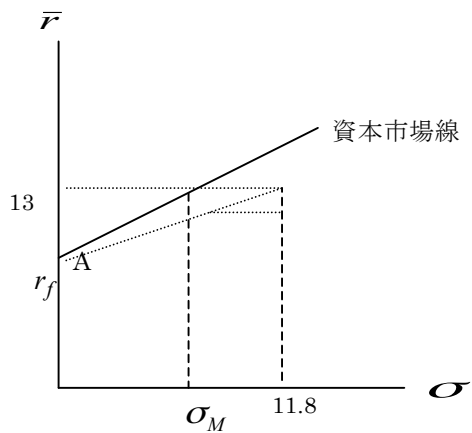
証券市場線に図示する



計算 4：シャープの指標の計算

式 $\bar{r} - r_f = S \cdot \sigma$ を満たす S の値を計算

資本市場線に図示する



ABC ファンドのパフォーマンス			
年	ABCファンドの収益率	S&P500株平均	財務省短期証券
1	14	12	7
2	10	7	7.5
3	19	20	7.7
4	-8	-2	7.5
5	23	12	8.5
6	28	23	8
7	20	17	7.3
8	14	20	7
9	-9	-5	7.5
10	19	16	8
平均	13	12	7.6
標準偏差	11.8	8.9	0.4
cov(ABC, S&P)	96.3		
ベータ値	1.20375	1	
ジェンセンの	0.1035	0	
シャープのS	0.459345788	0.491934955	

価格公式としての CAPM :

購入時の価格 P 、売却時の価格 Q とすると、収益率 $r = (Q - P)/P$

CAPM の式に代入すると

$$\frac{Q - P}{P} = r_f + \beta(\bar{r}_M - r_f)$$

これを解いて、

$$P = \frac{Q}{1 + r_f + \beta(\bar{r}_M - r_f)} \quad \text{、リスク調整をした割引率}$$

例：油田ベンチャー

石油掘削を行っているベンチャー企業は 1 年後に 1000 ドルの収益を生み出すと期待されている。石油の存在にリスクがあるので、収益率の標準偏差は 40% である原油価格の不確定性は市場ポートフォリオと弱い関係にあるので、ベータ値 = 0.6

リスク・フリー金利 = 10%、市場ポートフォリオの期待収益率 = 17% のとき

$$\text{この企業の株価 } P = \frac{1000}{1 + 0.1 + 0.6(0.17 - 0.1)} = 876 \text{ ドル}$$

3.4 ファクター・モデル

資産の数 n が増加するにつれて、平均分散分析で必要となる情報量は大幅に増加する

n 個の平均値、 n 個の分散、 $n(n-1)/2$ 個の共分散のデータが必要

$n=1000$ のとき、50 万 1500 個のデータが必要

ファクター・モデルの考え方：

各種資産の確率変動は、少数の基本的な確率的変動の源(ファクターという)によって説明可能

(1) シングル・ファクター・モデル

第 i 資産の収益率 $= r_i$ 、 $i = 1, 2, \dots, n$ (確率変数)

各資産の変動の源としての共通のファクター $= f$ (確率変数)、平均値 $\bar{f}$ 、分散 σ_f^2

$$r_i = a_i + b_i f + e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

a_i = 切片、定数

b_i = ファクター負荷、定数

e_i = 誤差を表す確率変数、平均値ゼロ、各誤差項は無相関

$$E[e_i] = 0, \quad E[e_i e_j] = 0, i \neq j$$

$$E[e_i(f - \bar{f})] = 0$$

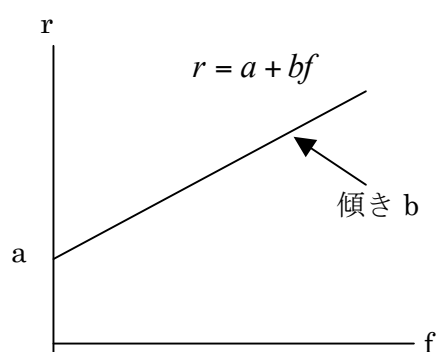
両辺の平均値を取ると、

$$\bar{r}_i = a_i + b_i \bar{f}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

分散を計算すると、

$$\text{Var}[r_i] = \text{Var}[a_i + b_i f + e_i] = E[\{a_i + b_i f + e_i - (a_i + b_i \bar{f})\}^2] = b_i^2 \sigma_f^2 + \sigma_{e_i}^2$$

$$\text{ただし、} \quad \sigma_f^2 = \text{Var}[f], \quad \sigma_{e_i}^2 = \text{Var}[e_i]$$



各資産の共分散を計算すると、

$$\sigma_{ij} = \text{Cov}[r_i, r_j] = b_i b_j \sigma_f^2, i \neq j$$

資産の収益率とファクターとの共分散を計算すると、

$$\text{Cov}[r_i, f] = \text{Cov}[a_i + b_i f + e_i, f] = b_i \sigma_f^2$$

よって、

$$b_i = \text{Cov}[r_i, f] / \sigma_f^2$$

収益率の計算に必要なデータ： $a_i, b_i, \bar{f}, \sigma_f^2, \sigma_{e_i}^2$ 、 $3n+2$ 個

スペシャル・ケースとしての CAPM:

資産 i の超過収益率 $= r_i - r_f$

市場の超過収益率 $= r_M - r_f \Rightarrow$ 共通ファクターとする

$$\text{このとき、} r_i - r_f = a_i + b_i(r_M - r_f) + e_i$$

CAPM では、 $a_i = 0$ である

(2) マルチ・ファクター・モデル

ファクターの数 が 2 個の場合、

$$r_i = a_i + b_{1i}f_1 + b_{2i}f_2 + e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$E[e_i(f_k - \bar{f}_k)] = 0, \quad k = 1, 2$$

ファクター1 とファクター2 の間に相関関係があっても良い、 $\text{Cov}[f_1, f_2] \neq 0$

期待収益率は

$$\bar{r}_i = a_i + b_{1i}\bar{f}_1 + b_{2i}\bar{f}_2, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

共分散と各係数は同様に計算できる

ファクターの選択：

外的カテゴリー

金融資産から見て外的な要因、GDP、失業率、鉱工業生産指数、物価指数など
抽出されたカテゴリー

証券収益率に関する既知の情報から抽出されるファクター、
市場ポートフォリオの収益率、ある産業の収益率の平均値、
主成分分析から抽出など

企業特性

企業の PER(株価収益率)、配当利回り、収益予想など

3.5 裁定価格理論

APT(asset pricing theory)

シングル・ファクター・モデルの単純バージョン

$$r_i = a_i + b_i f, i = 1, 2, \dots$$

誤差項が存在しない

基本的仮定：係数は市場における裁定の機会が除去されるように決定される

資産 1 と資産 2 からなるポートフォリオ

資産 1 の重み = w 、資産 2 の重み = $1 - w$

$$\text{収益率 } r = w a_1 + (1 - w) a_2 + [w b_1 + (1 - w) b_2] f$$

確率変数 f の項をゼロとするような重み

$$w = b_2 / (b_2 - b_1)$$

$$\text{収益率 } r = w a_1 + (1 - w) a_2 = \frac{a_1 b_2}{b_2 - b_1} + \frac{a_2 b_1}{b_1 - b_2}$$

無リスク資産の収益率 $\Rightarrow$ 安全資産の収益率 r_f と同じでなければならない

$$\frac{a_1 b_2}{b_2 - b_1} + \frac{a_2 b_1}{b_1 - b_2} = r_f \Rightarrow r_f (b_2 - b_1) = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

変形して

$$\frac{a_1 - r_f}{b_1} = \frac{a_2 - r_f}{b_2} = c \Rightarrow a_i = r_f + b_i c, i = 1, 2$$

したがって、収益率の期待値は

$$\bar{r}_i = a_i + b_i \bar{f} = r_f + b_i (c + \bar{f})$$

ここで、 $\lambda_0 = r_f, \lambda = c + \bar{f}$ とおくと、

$$\bar{r}_i = \lambda_0 + b_i \lambda$$

λ_0 と λ が分かれば(すべての資産に共通な値)、

資産 i の期待収益率は b_i の値によって決定

CAPM との関係： $\lambda = \bar{r}_M - r_f, b_i = \beta_i$ と置けば CAPM と一致する

定理：

n 種類の資産があり、各資産の収益率は m 種類のファクターに依存しているとする。

$$r_i = a_i + \sum_{j=1}^m b_{ij} f_j, i = 1, 2, \dots, n$$

このとき、

$$\bar{r}_i = \lambda_0 + \sum_{j=1}^m b_{ij} \lambda_j, i = 1, 2, \dots, n$$

を満たす定数 $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ が存在する。