ファイナンス 2

増山 幸一
明治学院大学経済学部
2016 年 4 月

以上

1.　証券価格と金利

1.1　債券の種類と性質

確定利付証券＝固定的なキャッシュ・フロー流列を保障する証券

唯一のリスクは証券の発行者がデフォルトする可能性

市場での金利指標に連動するキャッシュ・フローのケースも含める

- 貯蓄預金

要求払い預金：一般的に市場金利に連動した変動金利

定期預金：一定期間保持しなければならない預金

譲渡性預金（CD）：市場で自由に売却が可能

- 短期金融商品

コマーシャル・ペーパー（CP）：企業に対する無保証の貸付証書

銀行引受手形：企業に代わり銀行が代金を支払うことを保証した証書

ユーロ円預金：ユーロ市場で保有する円建ての銀行預金

- 国債(government bonds)

FB：政府短期証券(financial bills)のこと、日銀引受で通常 60 日満期

TB：割引短期国債(Treasury Bills)のこと、国債の借換えにために発行、3〜6 ヶ月満期

中期国債：2 から 5 年満期

長期国債：10 年満期

超長期国債：20 年満期

- 他の債券

政府保証債：政府関係機関が発行する債券のうち政府が元利支払い保証をしたもの

地方債：都道府県や地方公共団体が発行する債券

社債：事業債とも言う、企業が事業資金調達のために発行する

- モーゲージ(mortgage)

住宅ローン：債券とは逆の役割を果たす

住宅購入者は定期的な支払いを約束する住宅モーゲージを金融機関などに売る

モーゲージ担保証券：モーゲージの大きなパッケージが金融機関の間で売買される

- 年金(annuity)

年金：事前に決められたスケジュールにしたがって保有者に定期的にお金を支払う契約

年金の購入は市場で行われるが、年金は市場で取引されない(流通市場は存在しない)

1.2　長期債の価格

長期債＝毎期一定の金利(クーポン)を受取り、満期時に額面金額(元本)が支払われる

長期債の現在価値＝クーポン支払いの現在価値＋元本金額の現在価値

クーポン支払額をC、額面金額をFとおくと、

$$PV=\frac{C}{1+r}+\frac{C}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{C}{(1+r)^t}+\frac{F}{(1+r)^t}=C[\frac{1}{r}-\frac{1}{r(1+r)^t}]+\frac{F}{(1+r)^t}$$

C/F＝クーポン率(利率)という

例：5年後が満期となる長期米国債は額面に対するクーポン・レートが10.75%、額面金額が1000ドルであった。この国債の価格は？

流通している中期米国債の収益率が5.4％であった　⇒　割引率＝5.4％

毎年のキャッシュ・フロー＝10.75×1000=107.5 ドル

長期債の現在価値

$$=107.5[\frac{1}{0.05}-\frac{1}{0.054\times 1.054^5}]+\frac{1000}{1.054^5}=460.32+768.77=1229.09 \quad \text{ドル}$$

5年間同一率で割引くことは現実的か？

短期金利と長期金利は同じ値か？

1年間の投資の収益率と2年間の投資の収益率は同じか？

金利の期間構造を調べる必要性

以下では、金利は一定と仮定する。

● 長期債の満期(最終)利回り(yield to maturity)

長期債の現在価格がPであり、クーポン支払額がC、額面額がFであるとき、下の式を満たすλを満期利回りという

$$P=\frac{C}{1+\lambda}+\frac{C}{(1+\lambda)^2}+\cdots+\frac{C}{(1+\lambda)^t}+\frac{F}{(1+\lambda)^t}=C[\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda(1+\lambda)^t}]+\frac{F}{(1+\lambda)^t}$$

債券の満期利回りは他の確定利付証券の金利と非常に近い値になる

債券の利回りが他の証券の金利よりも低ければ、この債券は買わない

⇒　債券価格は下落する　⇒　Pが低下するとき、λは上昇する

例：

５年後に満期となる額面100万円、年１回のクーポンが５万円の債券価格が98.24万円であった。

満期利回りは以下の式で計算

$$98.24=5[\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda(1+\lambda)^5}]+\frac{100}{(1+\lambda)^5}$$

計算すると、$\lambda=0.0541$

保有期間利回り：時刻0で購入して、時刻tで売却

$$P_0=\frac{C}{1+\lambda}+\frac{C}{(1+\lambda)^2}+\cdots+\frac{C}{(1+\lambda)^t}+\frac{P_t}{(1+\lambda)^t}=C[\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda(1+\lambda)^t}]+\frac{P_t}{(1+\lambda)^t}$$

● 価格・利回り曲線(price-yield curve)

クーポンがC、額面がF、t期後に満期となる債券：市場で投資家の要求する利回り（金利）がrのとき、債券価格Pは

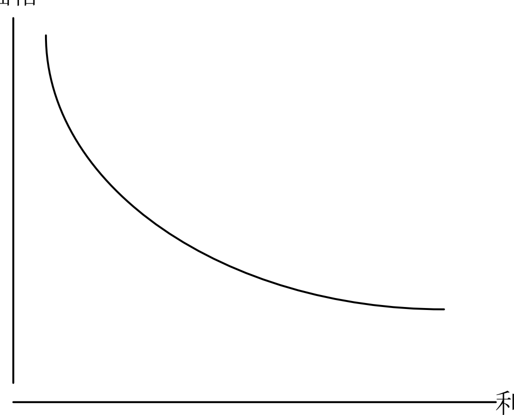
$$P = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{C}{(1+r)^t} + \frac{F}{(1+r)^t} = C[\frac{1}{r} - \frac{1}{r(1+r)^t}] + \frac{F}{(1+r)^t}$$

金利が上昇すると、債券価格は下落

利回りが変化するとき、債券価格も変化する　⇒　価格・利回り曲線(price-yield curve)

　価格・利回り曲線は右下がりである

　利回りとクーポン率が一致するとき、パー・ボンド(par bond)状態という



例：５年後に満期となる額面100万円、年1回のクーポンが5万円の債券価格

金利が5%のとき、$P = 5[\frac{1}{0.05} - \frac{1}{0.05(1+0.05)^5}] + \frac{100}{(1+0.05)^5} = 5 \times 4.329 + 78.4 = 100.045$

　金利が4%のとき、$P = 5[\frac{1}{0.04} - \frac{1}{0.04(1+0.04)^5}] + \frac{100}{(1+0.04)^5} = 5 \times 4.452 + 82.2 = 104.46$

　金利が4%、6年後に満期となるとき

1.3　デュレーション(duration)

デュレーション：債券価格に対する金利の直接的な感度尺度

債券価格　$P = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{C}{(1+r)^t} + \frac{F}{(1+r)^t}$

金利で微分すると、

$$dP = -[\frac{C}{(1+r)^2} + \frac{2C}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{tC}{(1+r)^{(t+1)}} + \frac{tF}{(1+r)^{(t+1)}}]dr$$

ここで、$D = [\frac{C}{1+r} + \frac{2C}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{tC}{(1+r)^t} + \frac{tF}{(1+r)^t}]/P$　と定義すると、

$$\frac{dP}{P} = -D\frac{dr}{(1+r)}$$

<u>金利として債券利回りを用いてDを計算するとき</u>、マコーレー・デュレーションという

　デュレーションの値が大きいほど、金利変化がより大きく価格を変化させる

デュレーションの定義式を変形すると、

$$D=\frac{PV(1)\cdot 1+PV(2)\cdot 2+\cdots+PV(t)\cdot t}{P}$$

$PV(t)$ は時刻 t で発生するキャッシュ・フローの現在価値

$$P=PV(1)+PV(2)+\cdots+PV(t)$$

$w(n)=PV(n)/P$ とおくと、

$$D=w(1)\cdot 1+w(2)\cdot 2+\cdots+w(t)\cdot t$$

と表現できる

D はキャッシュ・フローが起こる時間の加重平均である、

投資資金の平均回収期間

例：クーポン 5%(年 1 回)、額面 100 万円、残存期間 5 年の債券

金利が 4%のとき、債券価格＝104.45　万円

マコーレー・デュレーションの値

$$D=[\frac{5}{1+0.04}+\frac{2\cdot 5}{(1+0.04)^2}+\frac{3\cdot 5}{(1+0.04)^3}+\frac{4\cdot 5}{(1+0.04)^4}+\frac{5\cdot 105}{(1+0.04)^5}]/104.45$$

例題1：クーポン5%(年1回)、額面100万円、残存期間5年の債券を考える。金利が4%のと								
	クーポン5%(年1[	0.05						
	額面100万円	100						
	残存期間5年	5						
	金利4%	0.04						
年	キャッシュフロー	割引係数	現在価値	重み	デュレーション			
1	5	0.961538	4.807692	0.046028	0.046028			
2	5	0.924556	4.622781	0.044258	0.088515			
3	5	0.888996	4.444982	0.042555	0.127666			
4	5	0.854804	4.274021	0.040919	0.163674			
5	105	0.821927	86.30235	0.826241	4.131203			
計			104.4518	1	4.557087			

例：満期まで 3 年、クーポン率 7%(年 2 回支払い)、額面 100 万円、債券利回りが８％

債券価格とマコーレー・デュレーションの値を求めなさい。

$$D=[\frac{3.5\cdot 0.5}{1+0.04}+\frac{3.5\cdot 1}{(1+0.04)^2}+\frac{3.5\cdot 1.5}{(1+0.04)^3}+\frac{3.5\cdot 2}{(1+0.04)^4}+\frac{3.5\cdot 2.5}{(1+0.04)^5}+\frac{103.5\cdot 3}{(1+0.04)^5}]/97.62$$

例題2：満期まで3年、クーポン率7%(年2回支払い)、額面100万円の債券						
	クーポン7%	0.07				
	額面100万円	100				
	残存期間3年	3				
	金利8%	0.08				
年	キャッシュ	割引係数	現在価値	重み	デュレーション	
0.5	3.5	0.961538	3.365385	0.034473	0.017237	
1	3.5	0.924556	3.235947	0.033147	0.033147	
1.5	3.5	0.888996	3.111487	0.031872	0.047809	
2	3.5	0.854804	2.991815	0.030723	0.061447	
2.5	3.5	0.821927	2.876745	0.029468	0.07367	
3	103.5	0.790315	81.79755	0.837892	2.513675	
計			97.37893	1	2.753717	

$D_M = D/(1+r)$　とおくと、

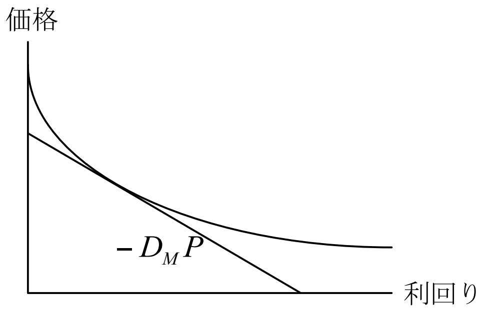
$$\frac{dP}{dr} = -D_M P$$

さらに、小さな利回り変化に対して、近似式　$dP/Dr \approx \Delta P/\Delta r$　を用いると、

$$\Delta P = -D_M P \Delta r$$

が成立する

価格・利回り曲線の接線の傾きの計算が容易



価格・利回り曲線の傾き

例：5 年満期、クーポン利率 5%(年 1 回)、額面 100 万円。パーの点で（価格＝100）のマコーレー・デュレーションの値を求めなさい。

	額面100万円	100			
	残存期間5年	5			
	金利5%	0.05	0.04		
年	キャッシュフロー	割引係数	現在価値	重み	デュレーシ
1	5	0.952381	4.761905	0.047619	0.047619
2	5	0.907029	4.535147	0.045351	0.090703
3	5	0.863838	4.319188	0.043192	0.129576
4	5	0.822702	4.113512	0.041135	0.16454
5	105	0.783526	82.27025	0.822702	4.113512
計			100	1	4.545951
金利4%のときの債券価格		104.4518			
金利4%のときの債券価格近似		104.3295			

$D_M = D/(1+0.05) = 4.54/1.05$＝4.3295

価格・利回り曲線の接線の傾きの計算　$\frac{dP}{dr} = -432.95$

よって、利回りが 5 %から 4%に変化するときの価格変化は

$$\Delta P = -432.95 \times (-0.01) = 4.3295$$

したがって、新しい債券価格は $P = 104.329$ と予想される

1.4　株式の価値

株式取引

発行市場(primary market)：

流通市場(secondary market)：証券取引所、店頭市場(NASDAQ など)で取引

株式の現在価値＝株式保有による将来キャッシュ・フローを同様なリスクを持つ証券の収益率で割引く

結論：株式の現在価値＝予想された将来配当の現在価値

キャピタル・ゲインはなぜ関係しないのか？

現在の株価＝P_0、1 年後の株価＝P_1、今期末(1 年後)での期待配当＝DIV_1
株式保有によるキャッシュ・フロー＝現金配当＋キャピタル・ゲイン(ロス)
＝$DIV_1 + P_1 - P_0$

株式の期待収益率＝$r = \dfrac{DIV_1 + P_1 - P_0}{P_0}$　市場割引率(market capitalization rate)という

例：A 社の株が 1 株 1 万円で売られている。投資家は翌年の配当として 500 円を予想している。1 年後の株価は 11000 円で売れると予想している。

期待収益率＝$\dfrac{500 + 11000 - 10000}{10000} = 0.15$

現在の株価は、上の式を現在の株価で解いて、

$$P_0 = \frac{DIV_1 + P_1}{1 + r} \quad ①$$

配当予想、株価の将来価格、類似証券の期待収益率が分かると、現在の株価が決定
来年の株価は

$$P_1 = \frac{DIV_2 + P_2}{1 + r} \quad ②（割引率は変化しないと仮定）$$

①式に②式を代入して、

$$P_0 = \frac{DIV_1}{1 + r} + \frac{DIV_2 + P_2}{(1 + r)^2} \quad ③$$

より一般化して、

$$P_0 = \frac{DIV_1}{1 + r} + \frac{DIV_2}{(1 + r)^2} + \cdots + \frac{DIV_{n-1}}{(1 + r)^{n-1}} + \frac{DIV_n + P_n}{(1 + r)^n}$$

例：A 社の株への投資家は翌年の配当として 500 円を予想している。1 年後の株価は 11000 円で売れると予想している。A 社の株と類似の証券の期待収益率が 15%であるとき、A 社の現在の株価は

$$P_0 = \frac{500 + 11000}{1.15} = 10000 \text{円}$$

A 社の株の 2 年後の配当が 550 円であると予想され、2 年後の株価が 12100 円であると予想されている。

1 年後の株価＝$P_1 = \dfrac{550 + 12100}{1.15} = 11000$ 円

③式用いて現在の株価を計算すると、

$$P_0 = \frac{500}{1.15} + \frac{550 + 12100}{1.15^2} = 10000 \text{円}$$

将来期間を無限大にすると、

$$P_0 = \frac{DIV_1}{1+r} + \frac{DIV_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{DIV_{n-1}}{(1+r)^{n-1}} + \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{DIV_j}{(1+r)^j}$$

　株式の価値　≠　1株あたりの利益の現在価値の総和

期待配当が成長率 g で増加すると予想されるとき、

$$P_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{DIV_1(1+g)^{j-1}}{(1+r)^j} = \frac{DIV_1}{r-g}$$

ただし、予想成長率は割引率よりも小さいと仮定されている

この式を割引率について解くと、

$$r = \frac{DIV_1}{P_0} + g$$

　市場割引率＝配当利回り(dividend yield)＋配当の期待成長率

市場割引率は株主資本コスト(cost of equity capital)とも言われる

配当性向(payout rate)＝1株当たり利益(EPS)に対する配当金の比率

株主資本利益率(return on equity; ROE)＝簿価での株主資本に対する利益の比率

再投資率＝1－配当性向＝1－DIV/EPS

株主資本利益率(ROE)＝EPS/1株当たり簿価での株主資本

配当性向が一定であるとき、再投資した分だけ簿価での株主資本が増加する

　⇒　1株あたりの利益も増加　⇒　1株あたりの配当も増加

　配当成長率＝g＝再投資率×ROE

例:B電力会社の株価は4100円、翌年の配当支払いは127円と予想されている。配当性向は0.47、つまり再投資率は0.53、株主資本利益率は10%であった。

　配当利回り＝$\frac{127}{4100} = 0.031$

　配当成長率＝0.53×0.1=0.053

　以上より、

$$r = \frac{DIV_1}{P_0} + g = 0.031 + 0.053 = 0.084$$

B電力会社の市場割引率は8.4%

2.　金利の期間構造

2.1　スポット・レート

(1)金利のスポット・レート(spot rate)

割引債(ゼロ・クーポン債)＝クーポン支払いがゼロの債券

　満期日に定められた金額(額面)が支払われる

t 年後に満期となる割引債の市場価格から算出される最終利回り

　　＝　t 年間のスポット・レート

　スポット・レート s_t ：t 年間(期間)貸したお金が生み出す金利、年利表示

　　s_1 ＝現時点から 1 期間貸したお金に支払われる年金利

　　s_2 ＝現時点から 2 期間貸したお金に支払われる 1 年当たりの金利

　　年複利で金利 s_2 の 2 年物銀行預金に金額 A を預託するとき、

　　　　2 年後の受取額は $(1+s_2)^2 A$

　n 年後に満期となる割引債：額面＝F、現在価格＝P　とすると、スポット・レート s_n

　　$F=(1+s_n)^n P$　$\Rightarrow s_n$ の計測

例題：例題 1：1 年物割引債の価格が 95 万円、2 年物割引債の価格が 90 万円、3 年物割引債の価格が 85 万円である。すべての債権の額面は 100 万円とする。

1 年物スポット・レート＝

2 年物スポット・レート＝

3 年物スポット・レート＝

(2)割引係数

　例：1 億円の資金を t 年間貸したとき、t 年後の受取額の計算

　(a)　年複利の下でのスポット・レート s_t の場合：$(1+s_t)^t$　億円

　(b)　年当たり m 回複利の下でスポット・レート s_t の場合：$(1+s_t/m)^{mt}$　億円

　(c)　連続複利の場合：$e^{s_t t}$　億円

　年複利の下で、時点 t でのキャッシュ・フローに対する割引係数 d_t 、$d_t=1/(1+s_t)^t$

　年当たり m 期間の複利の下で時点 t でのキャッシュ・フローに対する割引係数 d_t

$$d_t=1/(1+s_t/m)^{mt}$$

　連続複利の下で、時点 t でのキャッシュ・フローに対する割引係数 d_t 、$d_t=e^{-s_t t}$

　キャッシュ・フローの流列 $\{C_0, C_1, \ldots, C_n\}$ の現在価値 PV：

$$PV=C_0+d_1C_1+d_2C_2+\cdots+d_nC_n$$

例；スポット・レートが以下の表の通りである。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5.571	6.088	6.555	6.978	7.361	7.707	8.02	8.304	8.561	8.793

金鉱採掘権の例：キャッシュ・フローが１０年間にわたり毎年 200 万ドル

この採掘権の現在価値$P = 1358$万ドル

例：額面 100 万円の 3 年物債券のクーポン率は 5%である。スポット・レートは例題 1 の値を用いる。

この債券の現在価値は＝

この債券の最終利回りは＝

ゼロ・クーポン債が存在しない場合の計測：

1 年物 T ビルの金利から、1 年金利s_1が観測できる

次に、2 年物債券のP, C, F, s_1は既知であるから

$$P = \frac{C}{1+s_1} + \frac{C+F}{(1+s_2)^2}$$

を用いて、2 年物金利のスポット・レートs_2が決定できる

さらに、3 年物債券のデータを用いて、3 年物金利のスポット・レート

等々、計算する

例題：　1 年物利付債券、2 年物利付債券、3 年物利付債の価格が以下の表の通りである。

残存年数	1	2	3
クーポン	3	3.5	4
額面	100	100	100
価格	100	99	98

クーポンの支払いは年 1 回で、それらはこれから 1 年後、2 年後、3 年後に支払われる。

1 年物利付債の価格はスポット・レートを用いて以下の式が成立

$100 = (3+100)/(1+s_1)$　よって、$s_1 = 0.03$

2 年物利付債の価格はスポット・レートを用いて以下の式が成立

$99 = 3.5/(1+s_1) + (3.5+100)/(1+s_2)^2$　よって、$s_2 = 0.04$

3 年物利付債の価格はスポット・レートを用いて以下の式が成立

$98 = 4/(1+s_1) + 4/(1+s_2)^2 + (4+100)/(1+s_3)^3$　よって、$s_3 = 0.048$

例：債券 A は 10%クーポンの 10 年債、額面 100 万円、価格は 98.72

債券 B は 8%クーポンの 10 年債，額面 100 万円、価格は 85.89

債券 A を－0.8 単位、債券 B を 1 単位持つポートフォリオを作る

20 の額面、クーポン支払いは相殺されゼロとなる

価格 $P = 0.8P_A - P_B = 6.914$

10 年のスポット・レート s_{10} とする　$(1+s_{10})^{10}P = 20$

よって　$s_{10} = 11.2\%$

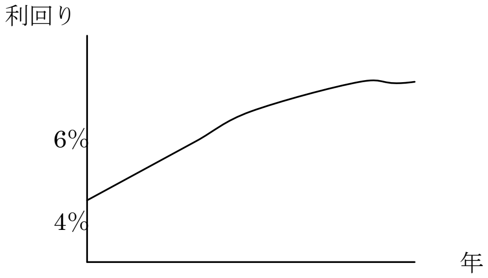
2.2　イールド・カーブ

長期債権の利回りは短期債券の利回りよりも高くなる傾向がある。

イールド・カーブ(yield curve)：利回りを満期までの時間の関数として描いた曲線

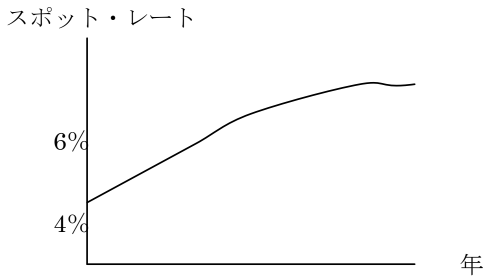
通常、右上がりとなる

右下がりとなるとき、逆イールド・カーブと言う



イールド・カーブ

スポット・レートは期間が長くなるにつれて、高くなる



スポット・レート・カーブ

金利と期間の関係を説明する理論＝金利の期間構造理論

2.3　フォワード・レート(forward rate)

フォワード・レート：将来時点で適用される金利

将来の t_1 時点で資金を借入れて、t_2 $(t_2 > t_1)$ 時点で返済する場合にかかる利息(金利)を、t_1 時点と t_2 時点間のフォワード・レートいい、$f_{t_1 t_2}$ と表現する。

<u>フォワード・レートの計算方法</u>

1 年間のスポット・レートを s_1、2 年間のスポット・レートを s_2

投資 a：1 万円を 2 年物預金に預ければ、2 年後には $(1+s_2)^2$ 万円となる

投資 b：1 万円を 1 年物預金に預け、1 年後に元利合計 $(1+s_1)$ 万円を金利 $f_{1,2}$ で 1 年間貸す契約を結ぶ、($f_{1,2}$ は 1 年間のフォワード・レート)

このとき 2 年後には$(1+s_1)(1+f_{1,2})$万円となる

投資 a と投資 b の間に裁定が起これば、

$(1+s_2)^2=(1+s_1)(1+f_{1,2})$　が成立

よって、

$$f_{1,2}=(1+s_2)^2/(1+s_1)-1$$

例：1 年と 2 年のスポット・レートをそれぞれ

$s_1=7\%,\quad s_2=8\%$　とする

フォワード・レートを求めよ。

フォワード・レート　$f=(1.08)^2/1.07=0.0901$

市場では複数のフォワード・レートが存在する、（借りるときと貸すときでは異なる）

市場でのスポット・レートの平均から計算したフォワード・レートを

インプライド・フォワード・レートと言う

より一般的に、

$$(1+s_n)^n=(1+s_{n-1})^{n-1}(1+f_{n-1,n})=(1+s_{n-2})^{n-2}(1+f_{n-2,n})^2$$

よって、　$f_{n-2,n}=[(1+s_n)^n/(1+s_{n-2})^{n-2}]^{1/2}-1$

$n>k$ に対して、　$(1+s_n)^n=(1+s_k)^k(1+f_{k,n})^{n-k}$ が成立するので、

$$f_{k,n}=[\frac{(1+s_n)^n}{(1+s_k)^{ki}}]^{1/(n-k)}-1$$

例題：　1 年物利付債券、2 年物利付債券、3 年物利付債の価格が以下の表の通りである。

残存年数	1	2	3
クーポン	3	3.5	4
額面	100	100	100
価格	100	99	98

クーポンの支払いは年 1 回で、それらはこれから 1 年後、2 年後、3 年後に支払われる。

1 年後のフォワード・レートはスポット・レートを用いて以下の式が成立

$f_{1,2}=(1+s_2)^2/(1+s_1)-1$　よって、$f_{1,2}=0.051$

2 年後のフォワード・レートはスポット・レートを用いて以下の式が成立

$f_{2,3}=(1+s_3)^3/(1+s_2)^2-1$、よって、$f_{2,3}=0.062$

2.4　期待ダイナミックス

スポット・レートの予測

現時点でのスポット・レート・カーブ＝{ $s_1, s_2, \ldots, s_n$ }：既知

純粋期待仮説：将来金利に関する投資家の予想が金利の期間構造を決定する

⇒現在のフォワード・レート $f_{1,j}$ が翌年のスポット・レート $s_{1,j}$ の予測値 $Es_{1,j}$ に等しい

$$Es_{1,j} = f_{1,j},\ j = 2,3,\ldots n$$

$(1+s_1)(1+Es_{1,2}) = (1+s_2)^2$ だから　$s_2 = [(1+s_1)(1+Es_{1,2})]^{1/2} - 1$

この仮定を前提とし、実際に期待が実現するならば、

翌年のスポット・レート $s_{1,j} = Es_{1,j} = f_{1,j},\ j = 2,3,\ldots n$

$(1+s_1)(1+f_{1,2}) = (1+s_2)^2$ だから、$s_{1,2} = f_{1,2} = [(1+s_2)^2/(1+s_1)] - 1$

一般的に、$(1+s_1)(1+f_{1,j})^{j-1} = (1+s_j)^j$　より

$$s_{1,j} = f_{1,j} = [\frac{(1+s_j)^j}{(1+s_1)}]^{1/(j-1)} - 1,\ j = 2,3,\ldots n$$

この式を期待ダイナミックと言う

例題：現時点で、1 年金利が 2%、2 年金利が 3%である。純粋期待仮説によると、
1 年後の 1 年金利は＝

短期金利

短期金利＝1 期間にわたるフォワード・レート

k 時点での短期金利 r_k ＝k 時点から (k＋1) 時点までのフォワード・レート $f_{k,k+1}$

スポット・レートと短期金利との関係：

0 時点から k 時点までの金利は毎年の投資を k 回繰り返すときの金利と同等

$$(1+s_k)^k = (1+r_0)(1+r_1)\cdots(1+r_{k-1})$$

また、$(1+f_{i,j})^{j-i} = (1+r_i)(1+r_{i+1})\cdots(1+r_{j-1})$

短期金利はスポット・レートやフォワード・レートを計算するために有効な指標

割引係数

k 時点に受取る現金を j 時点での価値に割引く係数＝ $d_{j,k}$

$$d_{j,k} = [\frac{1}{1+f_{j,k}}]^{k-j}, j < k$$

当然、$d_{0,1} = d_1, d_{0,2} = d_2, \cdots, d_{0,n} = d_n$

k 時点に受取る現金を i 時点での価値に割引くこと＝
　k 時点から j 時点まで割引、次いで、j 時点から i 時点まで割引くこと

$$d_{i,k} = d_{i,j}d_{j,k}, i < j < k$$

3.　金融派生商品

3.1　派生証券

派生証券(derivative security)：そのペイオフ(支払金)が他の金融資産の価値と明示的に結びついている証券

　例 1：6 ヵ月後にその時点の NTT 株 1 株の価格と等しい金額に換金できる保証書
　　　ペイオフが NTT 株の価格に依存する　→　派生証券となる

　例 2：6 週間後に 1 ポンド当たり 12 セントで 2000 ポンドの砂糖を購入する契約
先渡契約(forward contract)という、
ペイオフは明示されていないが、ペイオフは 6 週間後の砂糖価格に依存
6 週間後の砂糖価格が 13 セントであれば、売却すると 20 ドルの価値を持つ
　→　派生証券となる

　　例 3：3 ヵ月後に GM 株を 1 株 60 ドルで 1000 株購入できる権利を買う契約
　　　　GM 株を買うオプション(option)という、
　　　　3 ヵ月後の GM 株の価格が 70 ドルであれば、オプションを行使し、
　　　　　GM 株を買って、市場で売却すると、1 万ドルのペイオフが得られる
　　　→　派生証券となる

派生証券の価格を決める証券を原資産(underlying security)という
派生証券の市場規模：2004 年 BIS 統計における取引額
　over the counter market で 220.1 兆ドル(世界全体での GDP の 4 倍)
　Exchange-traded market で 49 兆ドル

先渡契約：
将来の特定された時点において特定の価格で特定の量を購入もしくは売却する契約
　先渡契約の買い手はロング・ポジションを取るという
　　　　　売り手はショート・ポジションを取るという
　先渡契約は法的文書により特定される
　すべての請求権は将来の定められた期日に清算され、初期支払いはゼロ

商品が受け渡されるときの価格を先渡価格(forward price)という、

現物市場(spot market)：原資産が直ちに受け渡される公開市場

先渡市場(forward market)：将来の商品の受け渡しの契約を売買する市場、相対取引

例 1：米国ドルと英国ポンドの先渡取引(J. C. Hull, p.4, 2005 年より)

table1: 2003年6月3日におけるUSD/GBP為替レートに対する直物レート、先渡レート(ドルの数量)

ポンドに対するドル	bid(買い)レート	offer(売り)レート
直物レート	1.6281	1.6285
1ヶ月先渡しレート	1.6248	1.6253
3ヶ月先渡しレート	1.6187	1.6192
6ヶ月先渡しレート	1.6094	1.6100

ある米国企業 A は 6 ヵ月後(12 月 3 日)に 100 万ポンドを英国企業に支払う必要

6 ヶ月先渡物を 1 ポンド当たり 1.6100 ドルで購入する契約を銀行 B と結んだ

企業は GBP の 6 ヶ月先渡物でロング・ポジションを取った

銀行は GBP の 6 ヶ月先渡物でショート・ポジションを取った

例 2：先渡契約のペイオフ

米国企業 A は 100 万ポンドを 161 万ドルで購入する 6 ヶ月先渡契約を保有している

12 月 3 日に、USD/GBP の直物為替レートが 1.700 に上昇したとき、

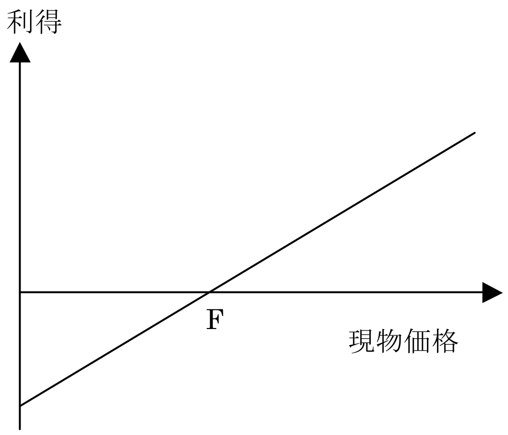
先渡契約は、170－161＝9 万ドルの価値をもたらす

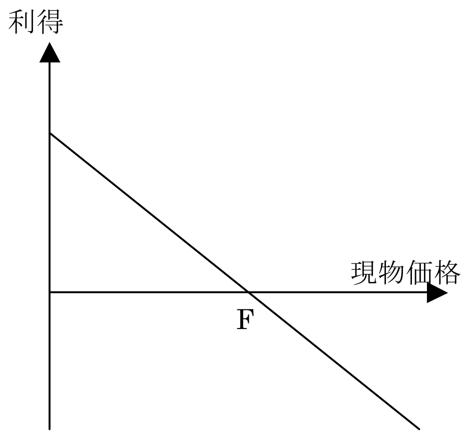
反対に、直物為替レートが 1.500 に下落するとき

先渡契約は、150－161＝－11 万ドルの損失をもたらす

先渡契約でのロング・ポジションのペイオフ＝$S_T - F$

S_T ＝直物価格、F ＝先渡価格





3.2　先渡価格

空売り(short selling):　所有していない資産を売ること

空売りの例：IBM 株の空売り

投資家 A は 4 月にブローカー(証券会社)B に IBM 株を 500 株空売りすることを依頼

ブローカーBは顧客CからIBMの株を500株借りて、それを市場で売る
株価が120ドルであるとき、Bは売却代金120×500＝60000ドルをAの口座に送金
6月に、Aは空売りを手仕舞うことをブローカーBに依頼
BはIBM株500株を市場価格100ドルで市場から購入し、Cに返済
A は購入代金100×500＝50000ドルをBに支払う
株の配当金が5月に1株当たり1ドルであった
配当金額1×500ドルもB(C)に支払う必要
この空売りからの純利益額＝60000－500－50000＝9500ドル

基本仮定：

(1) 取引費用はゼロ
(2) すべての参加者は同一の税率に従う
(3) すべての参加者は同一のリスク・フリー金利で資金の借り、貸しができる
(4) すべての参加者は裁定機会を利用できる

T=先渡し契約での受け渡し期日までの期間
S_0 = 現時点($t = 0$)における原資産の現物価格、S_t = 時刻tでの原資産の現物価格
F ＝現時点における先渡価格
r ＝満期Tのゼロ・クーポン債のリスク・フリー金利

I 配当金およびクーポン支払いを伴わない先渡契約のケース

例：3ヵ月後に株式を受け渡しする先渡契約(配当金がないとき)
3ヶ月物割引債の金利が5%(年利)、現在の株価が40ドル(四半期複利で計算)
(1) 先渡価格＝43ドルであるとき、
投資家Aは5%の金利で資金を借り入れ、1株当たり40ドルで株を購入し、3ヶ月先渡契約でショート・ポジションを取る
⇒3ヵ月後、Aは手持ち株を用いて先渡し契約を手仕舞い、43ドルを得る
43ドルの中から借り入れ資金を返済する
⇒ 1株あたりの純利益＝$43-(1+0.05/4)40$＝2.5ドル＞0
(2) 先渡し価格＝39ドルのとき
投資家Bは株式を空売りし、その売却代金を5%の金利で運用し、3ヶ月先渡契約でロング・ポジションを取る
⇒3ヵ月後、Bは運用していた資金を用いて、先渡契約で39ドルで現物株を入手して、空売りした株を返済
⇒ 1株あたりの純利益＝$(1+0.05/4)40-39$＝1.5ドル＞0
例の一般化：

時点 T でのキャッシュ・フローF の現在価値＝$\dfrac{F}{(1+r)^T}$

(1)　$F > (1+r)^T S_0$ と仮定してみる

このとき、次のようなポートフォリオを組む。
①現時点で現金 S_0 を金利 r で借り、現物市場で原資産 1 単位を価格 S_0 で購入・保管、先渡市場で 1 単位のショート・ポジションを取る。

時点 T で原資産を引き渡して、現金 F を受取り、ローン返済額 $(1+r)^T S_0$ を支払う

⇒結果、正味資産ゼロから正の利益 $F-(1+r)^T S_0 > 0$ が得られる

(2)　反対に、$F < (1+r)^T S_0$ のとき

②現時点で、原資産 1 単位の空売りを行い、S_0 ドルを貸し付け、先渡市場でロング・ポジションを取る

時点 T でローン返済額 $(1+r)^T S_0$ を受取り、価格 F で原資産を買って、返済する

⇒結果、正味資産ゼロから正の利益 $(1+r)^T S_0 - F > 0$ が得られる

金利裁定条件から、ポートフォリオから利益はゼロでなければならない

先渡価格の決定公式：

先渡価格 F は　$F = (1+r)^T S_0$　で与えられる。

例：東芝電機が 9 ヶ月先に受け渡される先渡銅の契約について買い手になる予定である。銅の現在の価格は 1 ポンド当たり 84.85 セント、9 ヶ月物の財務省証券(額面 1000 セント)が 970.87 セントで流通
銅の先渡価格はいくらか？
保管費用を無視、財務省証券の金利で割引く
財務省証券の 9 ヶ月金利を r とすると、$970.87 = 1000/(1+r)$
割引因子　$(1+r) = 1 + 0.0030003$
先渡価格 $F = (1+r)S = 1.0030001 \times 84.85 = 87.3958$ セント

1 ヶ月複利で計算するとき、1 ヶ月金利 r とすると、$970.87 = \dfrac{1000}{(1+r)^9}$

$(1+r) = 1 + 0.00329$
先渡価格 $F = (1+r)S = 1.00329 \times 84.85 = 87.3958$

Ⅱ　配当金およびクーポン支払いを伴う先渡契約のケース

例：9 ヶ月物利付債の現在価格が 900 ドル。40 ドルのクーポン支払いが 4 ヵ月後に来る。4 ヶ

月物割引債の金利＝3%(月次金利)、9 ヶ月物割引債の金利＝４%(月次金利)

(1)　9 ヶ月物先渡し価格が 910 ドル(886.55＜910)のとき

投資家 A は資金を借り入れ、原資産(９ヶ月物利付債)を購入し、先渡契約でショート・ポジションを取る。4 ヵ月後にクーポン受け取りがあるので、クーポン額分を返済できる

4 ヵ月後のクーポン支払いの現在価値 PVC＝$(1+0.03/12)^{-4}40$＝39.60 ドル

PVC を 4 ヶ月借り入れ(金利 3%)、900－PVC を 9 ヶ月借入れる(金利 4%)

900－PVC=$900-(1+0.03/12)^{-4}40$＝860.3975 ドル

9 ヵ月後の返済額＝$860.3922(1+0.04/12)^{9}$＝886.5563 ドル

9 ヵ月後に先渡し契約から得られるキャッシュ・フロー＝910 ドル

⇒　投資家 A の純利益＝910－886.5563＝23.4437 ドル

(2)　9 ヶ月物先渡し価格が 870 ドル(886.5563＞870)のとき

投資家 B は原資産(９ヶ月物利付債)を空売りし、先渡し契約でロング・ポジションを取る

原資産債券の空売りにより、900 ドルを得る

クーポン支払いの現在価値 PVC を 4 ヶ月間投資し(金利 3%)、残り 900－PVC＝$900-(1+0.03/12)^{-4}40$＝860.3975 ドルを 9 ヶ月間投資する(金利 4%)

⇒4 ヵ月後にクーポンを支払い、9 ヵ月後に 9 ヵ月後に

$[900-(1+0.03/12)^{-4}40](1+0.04/12)^{9}$＝886.5563 ドル

9 ヵ月後に空売りを手仕舞うため、870 ドルで原資産を購入し、返済する

⇒　投資家 B の純利益＝886.5563－870＝16.5563 ドル

金利裁定機会が消滅するためには、先渡し価格=886.5563 が要請

この例の一般化：配当金あるいはクーポン支払いの現在価値を I とする

裁定機会が消滅するためには、

$$F=(1+r)^{T}(S_0-I) \quad \text{：連続複利の表現で} \quad F=(S_0-I)e^{rT}$$

が成立しなければならない。毎期クーポン p(t)が支払われるときには、

$$I=\sum_{t=1}^{T}p(t)/(1+r)^{t} \text{(金利は一定とする)}$$

別形式で

$$F=(1+r)^{T}S_0-\sum_{t=1}^{T}(1+r)^{T-t}p(t)$$

例：額面 1 万ドル、クーポンが 8%(年 2 回配当)、満期まで数年ある財務省証券

この債券は 9260 ドルで流通している、クーポンは支払われた直後である。

金利は年率 9%である

1 年物の先渡し価格はいくらか？

　1 年内でのクーポンの受け取りは 6 ヵ月後と 12 ヶ月後の 2 回

　6 ヶ月の金利は r＝0.09/2=0.045、$p(t)=400$ ドル、$S_0=9260$ ドル

$$F=(1+r)^{2}S_0-\sum_{t=1}^{2}(1+r)^{2-t}p(t) \quad \text{ドル}$$

よって、$F = 9260 \cdot 1.0045^2 - 400 \cdot 1.0045 - 400 = 9294.15$ ドル

また、クーポン支払いの現在価値 $I = \dfrac{400}{1+0.045} + \dfrac{400}{(1+0.045)^2} = 749.067$ ドル

よって、$F = (1+r)^2 (S_0 - I) = (1+0.045)^2 (9269 - 749.0671) = 9294.152$

Ⅲ　保管費用が存在するケース

原資産の保管に費用がかかる：倉庫や貸金庫の料金、保険料など

マイナスの配当やクーポンと考える

受け渡し期日は T 期先、毎期保管費用がかかる

$c(t)$ ＝t 期から(t＋1)期の間の、1 単位当たり保管費用（期首に支払う）

$$\Rightarrow \quad -I = c(0) + \frac{c(1)}{1+r} + \frac{c(2)}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{c(T-1)}{(1+r)^{T-1}} = \sum_{t=0}^{T-1} \frac{c(t)}{(1+r)^t} = C \quad \text{保管費用の現在価値}$$

よって、先渡価格は

$F = (1+r)^T (S_0 - I) = (1+r)^T (S_0 + C)$　連続複利で、$F = (S_0 + C)e^{rT}$

別形式で

$$F = (1+r)^T S_0 + \sum_{t=0}^{T-1} (1+r)^{T-t} c(t)$$

例：現在の砂糖価格は 1 ポンド当たり 12 セント

5 ヶ月先の先渡価格を求めなさい。ただし、砂糖の保管費用は 1 月 1 ポンド当たり 0.1 セント、金利は年率 9%とする(月次複利で計算)

　月次の金利は r＝0.09/12=0.0075

先渡価格　$F = (1+r)^5 S_0 + \sum_{t=0}^{4} (1+r)^{5-t} c(t)$

よって、

$F = (1.0075)^5 12 + [(1.0075)^5 + (1.0075)^4 + (1.0075)^3 + (1.0075)^2 + 1.0075]0.1$＝12.96 セント

保管費用の現在価値 $C = [(1.0075)^{-4} + (1.0075)^{-3} + (1.0075)^{-2} + (1.0075)^{-1} + 1]0.1 = 0.4926$

$F = (1+r)^T (S_0 + C)$＝12.96 セント

市場で在庫量に不安があるとき：

空売りが困難；資産を貸してくれる人がいない

　空売りによる金利裁定が行われないので、

$$F < (1+r)^T S_0 + \sum_{t=0}^{T-1} (1+r)^{T-t} c(t)$$

となる

コンビニエンス・イールド：必要な量を手元に置いておくことで、価値がある
　効率的な経営上必要とされる在庫量の存在
　例：石油製油所は精製過程に投入する原油の在庫を必要とする。原油在庫を保有することで、工場の効率的な操業を実現できる。

$$(1+y)^T F = (1+r)^T [S_0 + \sum_{t=0}^{T-1} c(t)/(1+r)^t]$$

を満たす y をコンビニエンス・イールドという

3.3　先物市場

先渡契約を規格化、標準化し、取引所で売買する必要性
　→　先物契約(futures contracts)、先物市場(futures market)の登場
個人は取引所を通して先物契約を行い、取引所が売り手に対しても買い手に対しても、取引相手となる　→　取引所が取引相手の債務不履行リスクを肩代わりする

先物契約：
将来の規格化された受渡日に、原資産の標準化された量を先物価格で、取引所を相手方として購入・売却する契約、

- 取引者は証拠金勘定(margin account)を取引所に開かなければならない
- 先物契約は受渡期日前でも先物市場で売買できる　→　取引は取引所における口座(証拠金勘定)によって決済される
- 先物契約が受渡期日前に清算されないとき、受渡期日に自動的に清算される
- 先物価格が今日 F_0 であるとき、次の日にその価格が F_1 になる場合、当該先物契約は先物価格 F_1 で自動的に契約が更新される→　毎日、利益と損失が発生
- 先物契約での商品の受け渡しは極めてまれ、ほとんど場合、受け渡しの期日前に各自のポジションを手仕舞う　→　現物の受け渡しができないものでも先物契約が可能、東証株価指数を原資産とする TOPIX 先物、日経平均を原資産とする日経平均先物

例：
　商品先物
　　大麦、小麦、大豆などの穀物、
牛肉、豚肉などの肉、
ココア、コーヒー、綿花、木材、オレンジジュース、砂糖などの農産物
アルミ、銅、金、銀、白金、鉛，すず、亜鉛などの金属
原油、軽油、灯油、天然ガス、ガソリンなどの油類
　金融先物
　　米国債、ドイツ国債、日本国債、英国債、米国財務省証券などの債券
　　30 日物 FF 金利、1 ヶ月物 LIBOR、ユーロドル預金、ユーロ円預金など金利
　　ダウ工業株 30 種平均、S&P500、フランス株価指数、ドイツ株価指数
日経平均株価指数、Topix 株価指数などの株価指数

値洗い(marking to market)：

　今日先物価格が F_0 で、次の日にその価格が F_1 になったとき、

ロング・ポジションの場合：先物価格 F_1 で契約が清算・更新されるので、価格の差額 $F_1 - F_0$ を取引所から支払われる(証拠金勘定に追加される)

　先物価格が上昇するとき、ロング・ポジションの人は利益を得る

ショート・ポジションの場合：先物価格 F_1 で契約が清算・更新されるので、価格の差額 $F_1 - F_0$ を取引所に支払わなければならない(証拠金勘定から引き落とされる)

　先物価格が下落するとき、ショート・ポジションの人は利益を得る

証拠金勘定：

　先物契約ごとに一定額(通常は、価値の 5～10%程度)を積む

　1 日の取引の終わりに値洗いが行われる　→　口座の残額は変動する

　証拠金が維持証拠金のレベルを下回った場合、追加証拠金が要求される

例：A 氏は(ブッシェル当たり)2.10 ドルの価格で 3 月に受け渡しが行われるとうもろこしの先物契約で 1 単位のロング・ポジションを取った(1 単位は 5000 ブッシェル)

　証拠金として 800 ドル、維持証拠金 600 ドルが要求された

翌日、先物価格が 2.07 ドルに下がった

　A 氏の利益＝(2.07 - 2.10)500＝－150 ドル

　証拠金勘定の残額＝800－150＝650　ドル

あくる日価格がさらに下落して、2.05 ドルとなった

　A 氏の利益＝(2.05 - 2.07)500＝－100 ドル

　証拠金勘定の残額＝650－100＝550　ドル

　　→　追加証拠金の要求、証拠金を積むか、ポジションを清算するかする

先物価格：

　一般に、先物価格と現物価格は異なる

　受渡期日が近づくと、先物価格は現物価格に収斂する

先物契約と先渡し契約におけるキャッシュ・フローのパターンの相違：

①先渡では、キャッシュ・フローは受渡期日まではキャッシュ・フローは生じない

②先物では、毎日の値洗いによってキャッシュ・フローが生じる

③満期日での累積キャッシュ・フローは同一

先物と先渡の等価性：

金利が確定的で、金利裁定が排除されているならば、

　対応する契約の理論的な先渡価格と先物価格は一致する

金融先物の価格

先物価格の現在価値＝現物価格－配当または利払いの現在価値

先物価格は　$F=(1+r)^T S_0 - \sum_{t=1}^{T}(1+r)^t p(t)$

S＝現物価格、$p(k)$＝k 期における配当または利払い

商品先物の価格

先物価格の現在価値＝現物価格＋保管費用の現在価値
－コンビニエンス・イールドの現在価値

先物価格は　$F=(1+r)^T S_0 + \sum_{t=0}^{T-1}(1+r)^t c(t)$

$c(k)$＝k 期での保管費用－コンビニエンス・イールド

問題：ある限月の日経平均先物の当日終値は 11000 円であり、A 社はその価格で日経平均先物 1 単位のショート・ポジションを取った。その後の取引日の終値は、10990 円、11005 円、10980 円、11025 円であり、5 取引日後に 11025 円で反対売買を行って、手仕舞った。証拠金口座の残高が 100 万であるとして、証拠金口座の日々の残高の変動を示しなさい。日経平均先物の 1 単位は指数の 1000 倍であるである。

4.4　先物によるリスク・ヘッジ

ショート・ヘッジ：先物契約上でショート・ポジションを取るヘッジ

将来に売却する必要がある資産を保有している(入手予定)の主体が採用する

例：外国通貨のヘッジ

米国の電機会社が 3 ヵ月後(5 月 15 日)に日本の顧客から機器の売却代金を円で受取る。代金は 10 億円である。米国企業は 5 月 15 日に受取った円を市場でドルに換える(売る)必要がある。円とドルの為替リスクにさらされている。

通貨の先物市場で、企業は円の先物のショート・ポジションを取り、
3 ヵ月後に手仕舞う

→　為替リスクのヘッジ

先物価格は、現在 F_0 で、T ヵ月後に F_T、直物価格を S_T とする

円の 5 月先物のショート・ポジションをとり、5 月にポジションを手仕舞う

→　先物取引での収益＝$F_0 - F_T$、直物円の購入費用＝S_T

円の売却代金＝$S_T + (F_0 - F_T)$＝F_0　（$F_T = S_T$）

例：原油販売のヘッジ

原油生産者は 100 万バレルの原油を販売する契約を 5 月 15 日に結び、代金は 8 月 15 日の市場価格で支払う約束。8 月 15 日の市場価格が 1 ドル変化するごとに原油生産者の収入は 100 万ドル変化する。5 月 15 日の原油の直物価格は 1 バレル当たり 19 ドルで、ニューヨークの商品取引所(NYMEX)での 8 月引渡し原油の先物価格は 18.75 であった。

原油生産者は先物契約で 100 万バレル分のショート・ポジションを取って、価格リスクをヘ

ッジした。8 月 15 日に先物契約を手仕舞う。
（A）　8 月 15 日に直物価格が 17.50 ドルになったとき、販売代金は 1 バレル当たり 17.50 ドル

先物契約上でショート・ポジションを取ることにより、1 バレル当たり 18.75－17.50＝1.25 ドルの利益が入手

結果、原油の販売契約と先物契約の取引から、合計で、1 バレル当たり 17.50＋1.25＝18.75 ドルとなる

（B）　8 月 15 日に直物価格が 19.5 ドルになったとき、販売代金は 1 バレル当たり 19.50 ドル

先物契約上でショート・ポジションを取ることにより、1 バレル当たり 19.50－18.75＝0.75 ドルの損失が発生

結果、原油の販売契約と先物契約の取引から、合計で、1 バレル当たり 19.50－0.75＝18.75 ドルとなる

<u>ロング・ヘッジ</u>：先物契約上でロング・ポジションを取るヘッジ

将来にある資産を購入しなければならない必要性を持つ主体が採用する

例：小麦のヘッジ

パン製造工場は 12 月にある価格で引き渡す大量の注文を受けた。パン工場は 12 月に現物市場で大量の小麦を購入する必要がある。小麦価格が上昇すると利益が出なくなってしまう。先物価格は、現在 F_0 で、T ヵ月後に F_T、現物価格を S_T とする

小麦の 12 月先物のロング・ポジションをとり、12 月にポジションを手仕舞う

→　先物取引での収益＝ $F_T - F_0$、現物小麦の購入費用＝ S_T

小麦の購入費用＝ $S_T - F_T + F_0 = F_0$

例：電線製造者のヘッジ

現在は、1 月 15 日であるが、ある電線製造者は 5 月 15 日に 10 万ポンドの銅を購入する必要がある。銅の直物価格は 1.40 ドル、5 月渡しの先物価格は 1.20 ドルであった。電線製造者は NYMEX で 5 月渡しの先物契約上で 10 万ポンド分の銅のロング・ポジションを取った。5 月 15 日に先物契約を手仕舞う。

（A）5 月 15 日に、銅の直物価格が 1.25 ドルになった。先物契約から、

(1.25－1.20)100000＝5000 ドル　の利益

銅の購入費用として　1.25×100000＝125000 ドル

合計で総費用は 125000－5000＝120000 ドル

（B）5 月 15 日に、銅の直物価格が 1.05 ドルになった。先物契約から、

(1.20－1.05)×100000＝15000 ドル　の損失

銅の購入費用として　1.05×100000＝105000 ドル

合計で総費用は 105000＋15000＝120000 ドル

リスクに対するヘッジは、

(1)　損失額を最小化できるが、

(2)　収益が増加する可能性をなくす

ベーシス・リスク(basis risk)
ベーシス＝ヘッジすべき資産のスポット価格－ヘッジに用いられる契約の先物価格
S1＝時刻 t1 におけるスポット価格、S2＝時刻 t2 におけるスポット価格
F1＝時刻 t1 における先物価格、F2＝時刻 t2 における先物価格
b1＝時刻 t1 におけるベーシス、b2＝時刻 t2 におけるベーシス
$b_1 = S_1 - F_1$、　$b_2 = S_2 - F_2$

ケース 1：ある資産を時刻 t_2 で売却する際のリスクをヘッジ
時刻 t_1 に先物契約のショート・ポジションでヘッジ
資産の売却のよる収入＝S_2
先物契約を時刻 t_2 で手仕舞ったときの利益＝$F_1 - F_2$
⇒資産売却に伴う受け取り額＝$S_2 + F_1 - F_2 = F_1 + b_2$
ケース 2：ある資産を時刻 t_2 に購入する際のリスクをヘッジ
時刻 t_1 に先物契約のロング・ポジションでヘッジ
資産の購入に必要な額＝S_2
先物契約を時刻 t_2 で手仕舞ったときの損失＝$F_1 - F_2$
⇒資産購入に伴う支払い額＝$S_2 + F_1 - F_2 = F_1 + b_2$

例：3 月 1 日に米国企業 A は 7 月末に 5 千億円の日本円を受取ると予想している。シカゴ商品取引所(CME)では、3 月、6 月、9 月、12 月物の円先物が取引され、1 契約単位は 1250 万円となっている。企業 A は 3 月 1 日に 9 月先物円で 4 単位ショート・ヘッジを取った。7 月末に、先物を手仕舞った。3 月 1 日の先物価格が 0.78 セント/円、7 月末にスポット価格は 0.72 セント/円、先物価格は 0.725 セント/円であった。
手仕舞ったときのベーシス＝0.7200－0.725=－0.005
$S_2 + F_1 - F_2 = F_1 + b_2$=0.78－0.00　=　0.7750
企業 A が得た総額＝5000 万×0.775＝38 万 7500 ドル

例：6 月 8 日、企業 B は 10 月もしくは 11 月に原油を 2 万バレル購入しなければならない。毎月引き渡しの原油先物は NYMEX で取引され、契約単位は 1000 バレルである。企業 B はヘッジのために、12 月先物を 20 単位ロング・ヘッジした。6 月 8 日の先物価格は 1 バレル当たり 18 ドル。企業 A は 11 月 10 日に原油を購入する容易ができたので、先物を手仕舞った。11 月 10 日に、原油のスポット価格は 20 ドル、先物価格は 19.10 ドルであった。
手仕舞ったときのベーシス＝20.00－19.10=0.9 ドル
$S_2 + F_1 - F_2 = F_1 + b_2$=18.0＋0.9　=　18.9 ドル
企業 B が支払った総額＝20000×18.9＝37 万 8000 ドル

4.5　クロス・ヘッジと株式指数
最小分散ヘッジ：

ある資産の数量N_Aを時刻t_2で売却する際の価格・リスクをヘッジしたい
時刻t_1に先物契約の(原資産の)数量N_Fでショート・ヘッジをとる

$h = \dfrac{N_F}{N_A}$　ヘッジ比率という

時刻t_2における総収入$Y = S_2 N_A - (F_2 - F_1)N_F = S_1 N_A + (S_2 - S_1)N_A - (F_2 - F_1)N_F$
ヘッジ比率を用いて変形すると、

$Y = S_1 N_A + (\Delta S - h\Delta F)N_A$、ただし、$\Delta S = S_2 - S_1,\ \ \Delta F = F_2 - F_1$

N_A、S_1：時刻t_1で既知、　$\Delta S, \Delta F$：確率変数

${\sigma_S}^2 = Var(\Delta S)$、${\sigma_F}^2 = Var(\Delta F)$　、$\rho = Cov\{\Delta S, \Delta F\}/\sigma_S \sigma_F$とおくと、

$$v = Var\{\Delta S - h\Delta F\} = {\sigma_S}^2 - 2h\rho\sigma_S\sigma_F + h^2{\sigma_F}^2$$

この分散を最小にするためには

$$\frac{dv}{dh} = -2\rho\sigma_S\sigma_F + 2h{\sigma_F}^2 = 0$$

よって、

$$h^* = \rho\frac{\sigma_S}{\sigma_F}$$

クロス・ヘッジの最適な先物契約の(原資産の)数量は

$$N_F = h^* N_A$$

先物契約の 1 単位当たりのサイズ＝Q_F(原資産の数量)
先物契約の単位数＝N　⇒　$N_F = NQ_F$

$$N^* = h^* N_A / Q_F$$

ヘッジすべき資産の価格が先物契約の原資産の価格変動と同一の動きを示すとき、

$$h^* = 1$$

CAPM モデルでは、ベータ値が

$$\beta = \frac{Cov\{\Delta S, \Delta F\}}{{\sigma_F}^2} = \rho\frac{\sigma_S}{\sigma_F}$$

で与えられる　⇒　クロス・ヘッジにおけるヘッジ比率はベータ値と同一

例題：A 社は 4 月時点での評価で 2 億円となる価値のポートフォリオを所有している。このポートフォリオは日経平均と正の相関が極めて高く、ほぼ日経平均の動きと連動している。相関係数はほぼ 1 である。A 社は株価は下降局面に入ると危惧しており、日経平均でヘッジすることにした。A 社は 6 月を限月とする日経平均先物を 13000 円で 16 単位のショート・ポジションを取った。5 月末に日経平均先物が 11700 円をつけたところで反対売買を行い手仕舞った。そのとき、ポートフォリオの評価額は 1 億 7800 万円であった。日経平均先物の 1 単位は指数の 1000 倍である。

(1)　ポートフォリオの価値の下落による損失額はいかほどか。
(2)　ヘッジできた損失はいかほどか。

(3)　実際にこうむった損失はいかほどか。
答え：
(1)　2 億円－1 億 7800 万円＝2200 万円
(2)　(13000－11700)×16×1000＝2080 万円
(3)　2200－2080＝120 万円

3.5　オプションのペイオフ
オプション(options)＝指定された条件のもとで資産を購入する(売却する)権利
　オプションには指定された有効期限と価格が対応する

オプションの種類：
買う権利を与えるオプション＝コール・オプション(call option)
売る権利を与えるオプション＝プット・オプション(put option)

オプションそれ自身の価格＝オプション・プレミアム(option premium)
　　　オプション・プレミアムはオプションに対応した資産の価格に比べて小さい
オプション契約に従って実際に売買を実行すること＝権利行使するという(exercise)
オプションで指定された資産の売買価格＝権利行使価格(strike price)

オプションの権利行使期限：
オプションの有効期限の満期日にのみ権利行使ができるケース
＝ヨーロピアン・オプション
オプションの満期日を含めてそれ以前の時点でも権利行使ができるケース
＝アメリカン・オプション

オプションの売買：
オプションを与える側の当事者＝オプションを発行する(write)主体
オプションを得る側の当事者＝オプションを購入する主体
　オプションを購入した主体は発行した主体にオプション・プレミアムを支払う

オプションの購入者：
　オプションの権利行使をしても、しなくても、プレミアムは失われる
　プレミアム以外のいかなる損失のリスクも負わない

オプションの発行者：
　オプションが行使されたとき、定められた条件で資産を売買する義務がある
　コール・オプションが行使されたとき、指定された価格で資産を売る義務がある
　　　　(市場価格よりも低いならば、損失を生じる)
　プット・オプションが行使されたとき、指定された価格で資産を買う義務がある
　　　　(市場価格よりも高いならば、損失を生じる)

オプションの原資産：

株式オプション、外貨オプション、株価指数オプション、先物オプション　など

オプションの売買市場：取引所と店頭取引

多くのオプション(株式オプション、指数オプション)は取引所で取引されている

例：Chicago Board Options Exchange, American Stock Exchange, 東京証券取引所

個々のオプション取引は仲買人を通してなされ、仲買人は取引所と売買を行う

オプションの発行者は証拠金を積む必要がある

例：CBOE(Chicago Board Options Exchange)における Intel 株のアメリカン・オプションの終了取引価格

Table 1: Intel株に対するオプションの価格
(2003年5月29日、Intelの株価20.83ドル)

	コール・オプション			プット・オプション		
行使価格	6月	7月	10月	6月	7月	10月
20.00	1.25	1.60	2.40	0.45	0.85	1.50
22.50	0.20	0.45	1.15	1.85	2.20	2.85

6 月の満期期限は 21 日、7 月の満期は 19 日、10 月の満期は 18 日

(1)投資家 A がブローカーに 22.5 ドルを行使価格とする 10 月満期のコール・オプションの購入を依頼した

ブローカーはこの要請を実現するために、CBOE で取引相手を探す

プレミアム 1.15 ドルでこのコール・オプションを販売する取引相手 B が登場した

オプション契約 1 単位は米国では 100 株(日本では 1000 株)

投資家 A は 115 ドルをブローカーを介して CBOE に支払う

取引相手 B は CBOE から 115 ドルを受け取る

10 月 18 日までに、Intel の株価が 22.5 ドルを超えなかったとき、

投資家 A は権利行使しない　⇒　115 ドルの損失

10 月 18 日までに、株価が 30 ドルに上昇したとき、

投資家 A は権利行使をすると、1 株当たり 7.5 ドル×100＝750 ドルの利益

純益＝750－115＝635 ドル

(2) 投資家 A がブローカーに 20.0 ドルを行使価格とする 7 月満期のプット・オプションの購入を依頼した

ブローカーはこの要請を実現するために、CBOE で取引相手を探す

プレミアム 0.85 ドルでこのプット・オプションを販売する取引相手 B が登場した

投資家 A は 85 ドルをブローカーを介して CBOE に支払う

取引相手 B は CBOE から 85 ドルを受け取る

7 月 19 日までに、Intel の株価が 15 ドルに下落するとき、

投資家 A は権利行使　⇒　(20－15)×100＝500 ドルの利益

純益＝750－115＝635 ドル

7 月 19 日までに、株価が 20 ドルを超えて昇したとき、

投資家 A は権利行使しない　⇒　85 ドルの損失

オプションのペイオフ：

①　コール・オプション

コール・オプションを 1 単位保有している

権利行使価格＝K

満期日での原資産の現物価格＝S

$K < S$　ならば、市場価格よりも安く原資産が買える

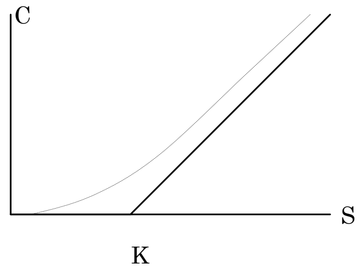
(市場価格で原資産を売れば利益を得る)

⇒　権利行使する

$K > S$　ならば、市場価格よりも高い価格で原資産を買うことになる

⇒　権利行使しない

満期日でのコール・オプションのペイオフ　$C = \max(0, S - K)$



コール・オプションの買い手

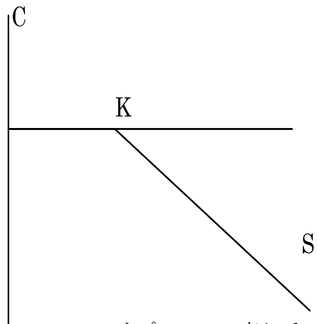
$K < S$ のとき、イン・ザ・マネー(in the money)という

$K = S$ のとき、アット・ザ・マネー(at the money)という

$K > S$ のとき、アウト・オブ・ザ・マネー(out of the money)という

コール・オプションの売り手(ショート・ポジション)のペイオフ

$$-C = -\max(0, S - K) = \min(0, K - S)$$



コール・オプションの売り手

②　プット・オプション

プット・オプションを 1 単位保有している

権利行使価格＝K

満期日での原資産の現物価格＝S

$K < S$　ならば、市場価格よりも安く原資産を売ることになる

　　権利行使すると、損失が発生

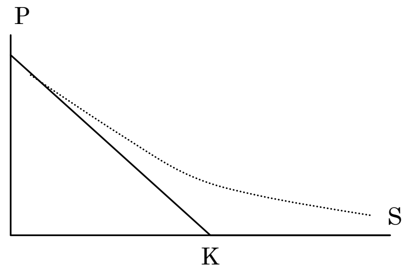
⇒　権利行使しない

$K > S$　ならば、市場価格よりも高い価格で原資産を売れる

(原資産を市場価格で購入し、オプションを行使すれば利益を得る)

⇒　権利行使する

満期日でのプット・オプションの価値 P：　$P = \max(0, K - S)$



プット・オプション

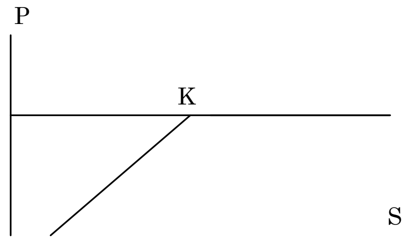
$K > S$ のとき、イン・ザ・マネー(in the money)という

$K = S$ のとき、アット・ザ・マネー(at the money)という

$K < S$ のとき、アウト・オブ・ザ・マネー(out of the money)という

プット・オプションの売り手のペイオフ

$-P = -\max(0, K - S) = \min(0, S - K)$



プット・オプションの売り手

4.6　オプションの組合せによるヘッジ

例 1：オプションによるヘッジ

A 社は 4 月時点での評価で 2 億円となる価値のポートフォリオを所有している。このポートフォリオは日経平均と正の相関が極めて高く、ほぼ日経平均の動きと連動している。相関係数はほぼ 1 である。A 社の株価は下降局面に入ると危惧しており、日経 225 オプションでヘッジすることにした。A 社は 6 月を限月とする権利行使価格 13000 円の日経 225 オプションのプットをオプション・プレミアム 242 円で 16 単位購入した。オプションの 1 単位は株単位の 1000 倍である。

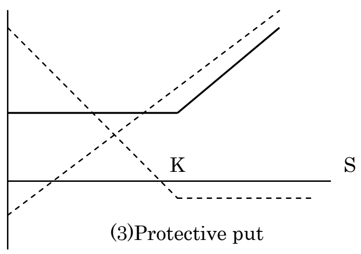
　A 社の予想通り、日経平均は下落して、6 月の日経 225 指数(最終清算指数)は 11700 円であった。ポートフォリオの価値は 1 億 7800 万円であった。オプションの購入でヘッジできた損失額はいかほどか。

　(13000－11700)×1000×16－242×1000×16＝16,928,000

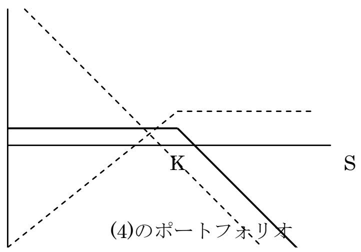
株式と１種類のオプションから構成されるポートフォリオ：
(1)　株式のロング・ポジションとコールのショート・ポジション
(2)　株式のショート・ポジションとコールのロング・ポジション
(3)　株式のロング・ポジションとプットのロング・ポジション
(4)　株式のショート・ポジションとプットのショート・ポジション

プット - コールパリティ　$p + S_0 - PV(D) = c + e^{-rT}K$

株式のロング・ポジションとプットのロング・ポジションから配当金を引いた価値
＝コール・オプションと現金の和の価値
　⇒　株式のロング・ポジションとプットのロング・ポジションからポートフォリオ(3)はコール・オプションのペイオフと類似のペイオフを生み出す
(3)　⇒プロテクティブ・プットという

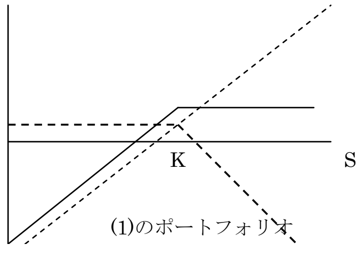


所有するポートフォリオの価値減少リスクをヘッジするための戦略
ポートフォリオ(4)は(3)の正反対の組合せ　⇒　コールのショート・ポジションと類似のペイオフを生む

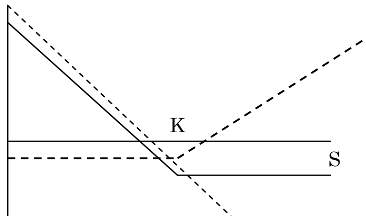


プット - コールパリティを変形して　$S_0 - c = e^{-rT}K + PV(D) - p$

株式のロング・ポジションとコールのショート・ポジションの和
　　＝　プットのショート・ポジションと現金の和
⇒　プットを売りたてたときのペイオフと類似のペイオフを生み出す



ポートフォリオ(2)は(1)の正反対の組合せ
　⇒　(2)はプットを購入したときのペイオフと類似のペイオフを生む



(2)のポートフォリオ

スプレッド：異なる行使価格を持つ同一種類のオプションの複数個

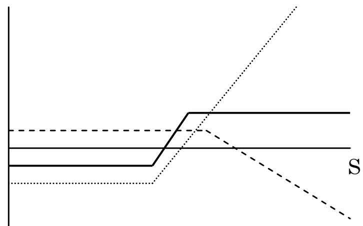
同一種類のオプションを異なった権利行使価格で売り買いする

bull spread(強気のスプレッド)

低い権利行使価格K_1でコールを買い、高い権利行使価格K_2でコールを売る

$K_1 < K_2$ ；　両方とも満期は同一

　価格上昇リスクと価格下落のリスク両方に対してヘッジする



ブル・スプレッド

例：行使価格 30 ドルのコールを 3 ドルで購入し、行使価格 35 ドルのコールを 1 ドルで売却するブル・スプレッド。この費用は 3－1＝2 ドル

　株価S_Tが 35 ドル以上となるとき、

ロング・コールから$S_T - 30$、ショート・コールから$-(S_T - 35)$、合計で 5－2＝ 3 ドル

　株価S_Tが 30 ドル以上、35 ドル以下となるとき、

ロング・コールから$S_T - 30$、ショート・コールから 0、合計で$S_T - 30 - 2$　ドル

　株価S_Tが 30 ドル以下となるとき、

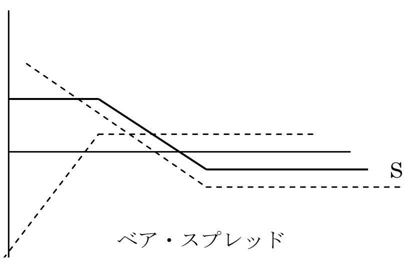
ロング・コールから 0、ショート・コールから 0　、合計で 0－2＝－ 2 ドル

bear spread(弱気のスプレッド)

利行使価格K_2でプットを買い、より低い権利行使価格K_1でプットを売る

$K_1 < K_2$ ；　両方とも満期は同一

　　　価格が下落すると予想して、価格下落のリスクをヘッジするために



ベア・スプレッド

例：行使価格 35 ドルのプットを 3 ドルで購入し、行使価格 30 ドルのプットを 1 ドルで売却す

るベア・スプレッド。この費用は 3－1＝2 ドル

　株価 S_T が 35 ドル以上となるとき、

ロング・プットから 0、ショート・プットから 0、合計で 0－2＝－2 ドル

　株価 S_T が 30 ドル以上、35 ドル以下となるとき、

ロング・プットから $35-S_T$、ショート・プットから 0、合計で $35-S_T-2$ ドル

　株価 S_T が 30 ドル以下となるとき、

ロング・プットから $35-S_T$、ショート・プットから S_T-30、合計で 5－2＝3 ドル

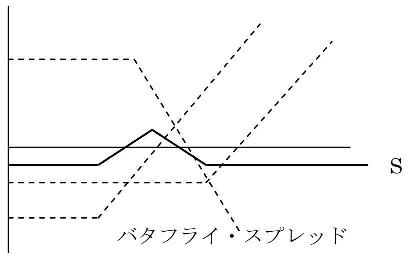
ブル・スプレッドとベア・スプレッドを同時に所有する戦略を box spread という

<u>バタフライ・スプレッド</u>：3 種類のコール・オプションの組合せ

権利行使価格 K_1 と権利行使価格 K_3 のコールを各 1 単位購入し($K_1 < K_3$)

権利行使価格 K_2 のコール・オプションを 2 単位売却する($K_1 < K_2 < K_3$)

株価が K_2 の近傍にあるときには利益が生まれる一方、株価が大きく下落したり上昇したりするときには、損失を小さく抑えることができる



バタフライ・スプレッド

例：行使価格が 15 ドル、17.5 ドル、20 ドルである 3 ヶ月物コール・オプションの価格が 4 ドル、2 ドル、0.5 ドルであった。これらのコールを用いてバタフライ・スプレッドを構成するとき、3 ヵ月後の株価に対応した利益額を計算しなさい。

4.　オプション価格と 2 項格子モデル

4.1　オプション価格とプット - コール・パリティ

変数の表記：

S_0＝現時点での株価、S_T＝満期時点での株価

T＝満期までの時間、K＝権利行使価格

r＝期間 T に対して適用される金利(連続複利で計算)

c＝ヨーロピアン型コール・オプションの価格(プレミアム)

C＝アメリカン型コール・オプションの価格(プレミアム)

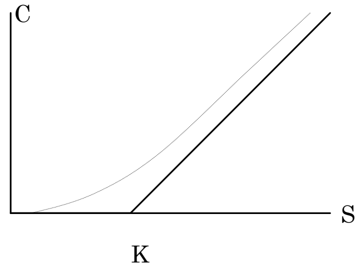
p＝ヨーロピアン型プット・オプションの価格(プレミアム)

P＝アメリカン型プット・オプションの価格(プレミアム)

オプションのペイオフ：

①　コール・オプション

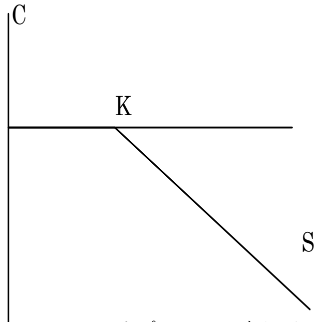
　買い手の満期日でのコール・オプションのペイオフ　$c=\max(0,S_T-K)$



コール・オプションの買い手

コール・オプションの売り手(ショート・ポジション)のペイオフ

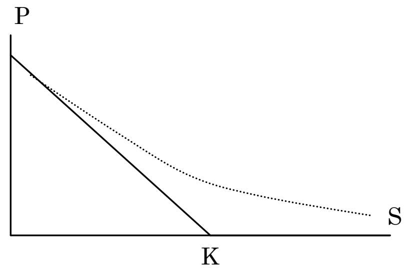
$$-C = -\max(0, S_T - K) = \min(0, K - S_T)$$



コール・オプションの売り手

② プット・オプション

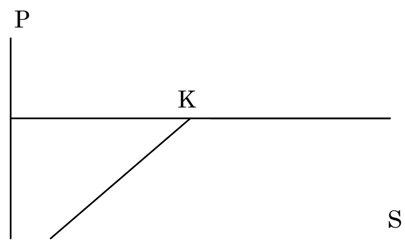
買い手の満期日でのプット・オプションの価値 P：　$p = \max(0, K - S_T)$



プット・オプション

プット・オプションの売り手のペイオフ

$$-P = -\max(0, K - S_T) = \min(0, S_T - K)$$



プット・オプションの売り手

満期以前でのオプションの価値は 6 つの要因に依存

1．原資産の現在価格

2．オプションの行使価格

3．満期までの期間の長さ
4．株価変動の分散
5．金利
6．満期までに予想される配当金

コール・オプションの性質：
　a. 現在株価、満期までの長さ、ボラティリティあるいは金利が上昇するとき、コール・オプションの価値は増加
　b. 行使価格または配当金額が上昇するとき、コール・オプションの価値は低下

プット・オプションの性質 1：
　a. 行使価格、満期までの長さ、ボラティリティまたは配当金が上昇するとき、プットの価値は増加
　b. 現在株価または金利が上昇するとき、プットの価値は低下する

オプション・プレミアム(価格)の上限：
　コール・オプションの価値は株価よりも小さい　⇒　$c \le S_0$,　$C \le S_0$
　プット・オプションの行使から、行使価格で売れるので、$p \le K$,　$P \le K$
　ヨーロピアン型では、満期時点が確定しているので、$p \le e^{-rT}K$

オプション・プレミアム(価格)の下限：配当金がないヨーロピアン型コール

$$c \ge \max(S_0 - e^{-rT}K, 0)$$

オプション・プレミアム(価格)の下限：配当金がないヨーロピアン型プット

$$p \ge \max(e^{-rT}K - S_0, 0)$$

例：現在株価が 28 ドル、権利行使価格が 25 ドルの 4 ヶ月先のコール・オプションの価格の下限を求めなさい。金利は年率 8%で、年複利と連続複利で計算しなさい。

例：現在株価が 12 ドル、権利行使価格が 15 ドルの 1 ヶ月先のプット・オプションの価格の下限を求めなさい。ただし、金利は年率 6 %で、年複利と連続複利で計算しなさい。

<u>プット・コール・パリティ</u>：配当金が存在しないケース
ポートフォリオ A＝ヨーロピアン・コール 1 単位と Ke^{-rT} と同額の現金
ポートフォリオ B＝ヨーロピアン・プット 1 単位と株式 1 単位

満期日 T(契約から T 期後)で、$K < S_T$ のとき、
　ポートフォリオ A では、権利行使が行われ、
　　キャッシュ・フロー＝$(S_T - K) + K = S_T$

ポートフォリオ B では、権利行使されず、現物株式の売却が行なわれる

キャッシュ・フロー＝S_T

$K > S_T$ のとき、

ポートフォリオ A では、権利行使されず、運用資金額 K が残る

キャッシュ・フロー＝K

ポートフォリオ B では、権利行使が行われ、手持ち株式が売却される

キャッシュ・フロー＝K

ポートフォリオ A の価値は満期時点で＝$\max(S_T, K)$

ポートフォリオ B の価値は満期時点で＝$\max(S_T, K)$

よって、ポートフォリオ A とポートフォリオ B の将来キャッシュ・フローは同一

⇒　両方の購入費用は等価値でなければならない

コール・オプションの価格＋行使価格の現在価値

＝プット・オプションの価格＋株式の現在価格

⇒　$c + Ke^{-rT} = p + S_0$　プット・コール・パリティという

離散的複利の計算式で、$c + \dfrac{K}{(1+r)^T} = p + S_0$

この等式が成立しないとき、裁定機会が存在する

例 : 無配の A 社株式の現在価格は 1200 円である。A 社株式の 3 ヵ月後満期のオプションの権利行使価格は 1100 円であり、コール・オプションのプレミアムは 130 円である。安全資産の金利が年 8%であるとする。満期と権利行使価格が同一のプット・オプションのプレミアムはいくらか？年複利と連続複利で計算しなさい。

年複利　$130 + \dfrac{1100}{1+0.02} = c + 1200$　⇒　$c = 130 + 1100 \times 0.98 - 1200 = 8$ 円

連続複利　$130 + 1100e^{-0.8 \cdot 3/12} = c + 1200$ ⇒　$c = 130 + 1100 \times 0.98 - 1200 = 8$ 円

プット・コール・パリティ : 配当金が存在するケース

原資産に配当がある場合は、

$c + e^{-rT}K = p + S_0 - PV(D)$　期間複利で、$c + \dfrac{K}{(1+r)^T} = p + S_0 - PV(D)$

ここで、$PV(D)$＝満期までに支払われる配当の現在価値

例 : 6 ヶ月先に満期となる行使価格 30 ドルのヨーロピアン型コール・オプションの価格は 2 ドルであった。現在株価が 29 ドルで、2 ヵ月後と 5 ヵ月後に 0.5 ドルの配当金が支払われる。金利が 10%であるとして、6 ヶ月先を満期とするヨーロピアン型プット・オプションの価格はいかほどか。年複利と連続複利で計算しなさい。

4.2　デルタ・ヘッジ

例 2 : デルタ・ヘッジ

1 年後に権利行使価格 220 円で 1 株購入できるコール・オプション

コール・オプションの価値は

満期日に株価が 500 円のとき、C= 500－220＝280 円

株価が 100 円のとき、C=0 円

(コール・オプションを売却するときの、ペイオフ＝$-\max(0, S-K)$)

この株式を 0.7 単位だけ購入するとき、

株価が 500 円のとき、資産額= 500×0.7＝350 円

株価が 100 円のとき、資産額=100×0.7＝70 円

株式を 0.7 単位購入し、コール・オプションを売りたてるならば、

株価が 500 円のとき、満期日でのキャッシュ・フロー＝350－280＝70 円

株価が 100 円のとき、満期日でのキャッシュ・フロー＝70－0＝70 円

⇒　収益が 70 円となるリスクのない安全資産の保有と等価値

一定数の株式の保有＋コール・オプションの売却＝安全資産　（デルタ・ヘッジという）

例 : 現在の株価は 20 ドルで、3 ヵ月後に 22 ドルもしくは 18 ドルになると予想されている。21 ドルを行使価格とする 3 ヶ月物ヨーロピアン・コール・オプションを購入すると、3 ヵ月後に、株価が 22 ドルになるときのペイオフは 1 ドル、18 ドルになるときには 0 である。

株式を x 単位購入すると同時に、ヨーロピアン・コール・オプションの 1 単位をショート・ポジションで保有する。株価が 22 ドルになるとき、このポートフォリオのペイオフは 22x－1 ドル、18 ドルになるときのペイオフは 18x。もし

22x－1＝18x

が成立するならば、このポートフォリオはリスク・フリーな資産となる。x＝0.25 とすると、株価が 22 ドルになる場合も、18 ドルになるときも、ペイオフは 18×0.25＝4.5　ドル。金利が 12% であるとき、4.5 ドルの現在価値は

$$4.5e^{-.012\times 3/12} = 4.367$$

オプションの価格を f とすると、このポートフォリオの価格は

20×0.25－f＝5－f

となる。無裁定条件より、

$$4.5e^{-.012\times 3/12} = 5 - f$$

これを解くと、

f＝0.633

一定数の株式の保有＋コール・オプションの売却＝安全資産

➪　一定数の株式の保有－安全資産＝－コール・オプションの売却　が成立

➪　一定数の株式の保有＋安全資産の借入れ＝コール・オプションの購入

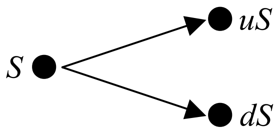
コール・オプションの価値は借入れた資金で株式を買うことで複製できる

コール・オプションの複製に必要な株式数をヘッジ・レシオ、オプション・デルタという

4.3　リスク中立確率

1 単位のコール・オプションのショート・ポジションと△単位の株式のロング・ポジション

初期株価＝S、T 年後に、例 T=0.25、株価が確率 p で uS、確率 $1-p$ で dS となる



安全資産の金利＝r (年率、連続複利)、T 年後の 1 円の現在価値 e^{-rT}

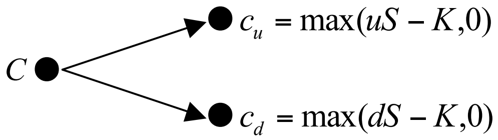
$u > e^{rT} > d$　と仮定

株式に対するコール・オプションの権利行使価格＝K

コール・オプションの価格(プレミアム)＝c

T 年後のコール・オプションのペイオフは、

確率 p で $c_u = \max(uS-K,0)$、確率 $1-p$ で $c_d = \max(dS-K,0)$



T 年後のポートフォリオのペイオフ

株価が上昇したとき、$Su\Delta - c_u$

株価が下落したとき、$Sd\Delta - c_d$

リスク・フリーであるためには、$Sd\Delta - c_u = Sd\Delta - c_d$

これを解くと、　$\Delta = \dfrac{c_u - c_d}{Su - Sd}$

ポートフォリオ(安全資産)の現在価値　$(Su\Delta - c_u)e^{-rT}$

ポートフォリオの購入価格　$S\Delta - c$

よって、$(Su\Delta - c_u)e^{-rT} = S\Delta - c$

これを解いて、　$c = \dfrac{1-de^{-rT}}{u-d}c_u + \dfrac{ue^{-rT}-1}{u-d}c_d$

ここで、新しい確率変数 q を定義

$q = \dfrac{e^{rT}-d}{u-d}$　$,0 < q < 1$　($1-q = \dfrac{u-e^{rT}}{u-d}$)(リスク中立確率という)

コール・オプションの価格は

$c = e^{-rT}\{qc_u + (1-q)c_d\}$

オプション価格の計算は株価変動の生起確率 p に依存しない、株価の水準にも依存しない、株価の変動の大きさだけに依存

例：$u = 1.1, d = 0.9, r = 0.12, T = 0.25, c_u = 1, c_d = 0$ のとき

$$q = \frac{e^{rT}-d}{u-d} = \frac{e^{0.12\times 3/12} - 0.9}{1.1-0.9} = 0.6523$$

よって、

$$c = e^{-rT}\{qc_u + (1-q)c_d\} = e^{-0.12\times0.25}\{0.6523\times1 - 0.3477\times0\} = 0.633$$

期間 T 年に対する粗利子率を R とするとき、$R = e^{rT}$
四半期複利で計算するとき、3 ヵ月間の粗利子率 $R = (1 + r/4)$

コール・オプションの価格は　$c = \frac{1}{R}\{qc_u + (1-q)c_d\}$、$q = \frac{R-d}{u-d}$

例：配当がない株式の株価が 1000 円、その株価を原資産とするヨーロピアン・コール・オプションの 1 年後の権利行使価格が 1000 円、安全資産の金利が 8%である。1 年後に、株価は確率 60%で、1250 円、確率 40%で 800 円となると予想される。コール・オプションの価格はいかほどか？

$$C_u = \max(uS - K, 0) = \max(1250 - 1000, 0) = 250$$
$$C_d = \max(dS - K, 0) = \max(800 - 1000, 0) = 0$$

$u = 1250/1000 = 1.25,\quad d = 800/1000 = 0.8$　より

リスク中立確率 $q = \frac{R-d}{u-d} = \frac{1.08-0.8}{1.25-0.8} = 0.6295$

よって、コール・オプションの価格 $C = \frac{1}{R}\{qC_u + (1-q)C_d\} = \frac{1}{1.08}\cdot 0.6295\cdot 250 = 145.28$

1 年間に m 回の利払いが行われ、これを複利で運用するときの元利合計 R＝ $(1 + \frac{r}{m})^m$、

1 年間に無限回の利払いが行われ、これを複利で運用するときの元利合計 R＝ e^r

安全資産を連続的に複利で 1 年間運用するときの収益は $R = e^{0.08} = 1.0833$。この数値を用いたときは、オプション価格は 145.3 円となる。

リスク中立確率の意味：

コール・オプションの価格　$c = e^{-rT}\{qc_u + (1-q)c_d\}$

株価が上昇する確率が q となるとき、オプションのペイオフの期待値は
$qc_u + (1-q)c_d$

このペイオフをリスク・フリー金利で割り引いた現在価値は　$\{qc_u + (1-q)c_d\}e^{-rT}$

⇒コール・オプションの価格はオプションのペイオフの期待値をリスク・フリー金利で割り引いた現在価値

株価の期待値は　$E(S_T) = qSu + (1-q)Sd = qS(u-d) + Sd$

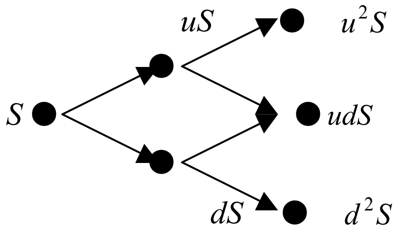
$q = \frac{e^{rT} - d}{u-d}$　を代入すると、

$$E(S_T) = e^{rT}S$$

株価は、平均的に、リスク・フリー金利と同率で上昇する
すべての株価の期待上昇率はリスク・フリー金利に調整

あたかも、株価変動からリスクを消去し、リスクがない世界を創出している

4.3　モデルの一般化



5.　ブラック＝ショールズ方程式

5.1　資産ダイナミックスのモデル

時刻tにおける確率過程Xの実現値＝$x_t, t=1,2,\cdots$

時刻t(現在)までに観察された実現値＝$\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_t\}$

時刻t(現在)までの確率過程Xの経路が与えられたときの、

時刻$t+1$での確率変数Xの確率分布＝$\Pr\{x_{t+1} < x : x_1, x_2, \cdots, x_t\}$

確率過程のマルコフ性の定義：

$\Pr\{x_{t+1} < x : x_1, x_2, \cdots, x_t\} = \Pr\{x_{t+1} < x : x_t\}$が成立するとき、確率過程はマルコフ過程である。
将来の生起確率は現在の状態にだけ依存して、現在に至るまでの過去の履歴に依存しない

例：IBM の株価がマルコフ過程に従うとする。現在の株価が 100 ドルである。株価の将来予想値は現在の株価 100 ドルに依存するが、過去の株価、例えば、1 週間前や 1 ヶ月前の株価に依存しない。

株価のマルコフ性➪　株式市場の(弱い意味で)効率性を含意

現在の株価は過去の株価の歴史に関わるすべての情報を含んでいる

➪　株価のチャート分析によって、利益を上げることはできない

株価Xの現在時刻での値＝$x(0)$

株価Xのt年間後の値＝$x(t), t=1,2,\cdots$

1 年間に変化した大きさ＝$\Delta x(t-1,t) = x(t) - x(t-1)$

$\Delta x(t-1,t), t=0,1,2,\cdots$は標準正規分布$N(0,1)$に従うと仮定

変化する大きさは互いに独立、$\Delta x(t-1,t)$と$\Delta x(t,t+1)$は独立であると仮定

2 年間の変化分＝$\Delta x(0,2) = x(2) - x(0) = \{x(2) - x(1)\} + \{x(1) - x(0)\} = \Delta x(1,2) + \Delta x(0,1)$

$E[\Delta x(0,2)] = E[\Delta x(1,2)] + E[\Delta x(0,1)] = 0$；$Var[\Delta x(0,2)] = Var[\Delta x(1,2)] + Var[\Delta x(0,1)] = 1+1=2$

$\Delta x(0,2)$は正規分布$N(0,\sqrt{2})$に従う

半年の間の変化分について、同様に考える

$\Delta x(0,1) = x(1) - x(0.5) + x(0.5) - x(0) = \{x(1) - x(0.5)\} + \{x(0.5) - x(0)\} = \Delta x(0.5,1) + \Delta x(0,0.5)$

$E[\Delta x(0,1)] = E[\Delta x(0.5,1)] + E[\Delta x(0,0.5)] = 0$　よって、$E[\Delta x(0,0.5)] = E[\Delta x(0.5,1)] = 0$

$Var[\Delta x(0,1)] = Var[\Delta x(0.5,1)] + Var[\Delta x(0,0.5)] = 1$　よって、$Var[\Delta x(0.5,1)] = Var[\Delta x(0,0.5)] = 1/2$

$\Delta x(0,0.5)$は正規分布$N(0,\sqrt{0.5})$に従う

➪　同様にして、　$\Delta x(0,0.25)$は正規分布$N(0,\sqrt{0.25})$に従う

一般的に、時刻tから$t+\Delta t$の間における株価の変化分の確率分布は$N(0,\sqrt{\Delta t})$に従う

ウィーナー過程(ブラウン運動)の定義：確率過程$w(t), t \in [0,T]$が以下の 2 条件を満たすとき、ウィーナー過程あるいはブラウン運動といわれる。

(1)　各時刻における増分は標準正規分布に従う。

$\Delta w(t) = w(t+\Delta t) - w(t) = \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}$　　ε_tは標準正規分布$N(0,1)$

(2)　各時刻における増分は互いに独立である。$E[\varepsilon_t \varepsilon_s] = E[\varepsilon_t]E[\varepsilon_s], t \neq s$

ウィーナー過程の増分は平均値ゼロ、標準偏差$\sqrt{\Delta t}$を持つ正規分布に従う。明らかにウィーナー過程はマルコフ過程となっている。

$N = \dfrac{T}{\Delta t}$　、$t_i = i \cdot \Delta t$とおくと

$$w(T) - w(0) = \sum_{i=1}^{N} \Delta w(t_i) = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}$$

と表現できる。よって、

$$E[w(T) - w(0)] = 0$$
$$Var[w(T) - w(0)] = \sum_{i=1}^{N} \Delta t = T$$

例：初期値が 25 のウィーナー過程を考える。1 年後に、このウィーナー過程は平均値 25、標準偏差 1 の正規分布に従う。5 年後に、平均値 25、標準偏差$\sqrt{5}$の正規分布に従う。

一般化ウィーナー過程(拡散過程)：

$\Delta z(t) = a\Delta t + b\varepsilon_t \sqrt{\Delta t}$　ここで、a, bは定数(aはドリフト係数、bは分散係数という)

このとき、

$$E[\Delta z(t)] = a\Delta t,\quad Var[\Delta z(t)] = b^2 Var[\varepsilon_t]\Delta t = b^2 \Delta t$$

$N = \dfrac{T}{\Delta t}$、$t_i = i \cdot \Delta t$とおくと、　$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^{N} \Delta z(t_i) = \sum_{i=1}^{N} \{a\Delta t + b\varepsilon_i \sqrt{\Delta t}\}$

よって、

$$E[z(T) - z(0)] = aT$$
$$Var[z(T) - z(0)] = Var[b\sum_{i=1}^{N} \Delta t] = b^2 T$$

一般化したウィーナー過程は、厳密には、$\Delta t \to dt$という極限形式で与えられる

$dx(t) = adt + bdw(t)$　確率微分方程式

$$E[dx(t)] = adt,\quad Var[dx(t)] = b^2 dt$$

例：ドリフト係数が 20、分散係数が 900 の一般化ウィーナー過程を考える。企業のキャッシュ・ポジションがこの確率過程に従うとして、初期のキャッシュ・ポジションが 50 億円であったとする。1 年後に、企業のキャッシュ・ポジションは平均値 70 億円、標準偏差$\sqrt{900}$億円の正規分布に従う。半年後のキャッシュ・ポジションは平均値 60 億円、標準偏差$\sqrt{900 \times 0.5} = 3\sqrt{0.5}$億円の正規分布に従う。

５.２　幾何ブラウン運動

伊藤過程：

ドリフト係数および分散係数が状態変数と時間の関数となっている。

$$dx(t) = a(x,t)dt + b(x,t)dw(t)$$

伊藤過程の期待値と分散は

$$E[dx(t)] = a(x,t)dt,\quad Var[dx(t)] = b(x,t)^2 dw(t)dw(t)$$

時刻tでの株価＝$S(t)$
時刻tから$t+dt$の間における株価の変化分＝$dS(t)$
時刻tから$t+dt$の間における期待収益率＝$dS(t)/S(t)$
単位時間当たりの期待収益率が一定で、μであるとすると、

$$dS(t)/S(t)=\mu dt \quad ➪ \quad S(t)=S(0)e^{\mu t}$$

株価は単位時間当たりμの成長率で上昇する
株価の変動には不確実な変動、ボラティリティーが付随する
収益率のボラティリティーが株価に依存せず、一定であると想定すると

$$➪ \quad dS(t)/S(t)=\sigma dw$$

株価変動の標準偏差は株価水準に比例する
以上をまとめると、

$dS(t)=\mu S(t)dt+\sigma S(t)dw(t)$　株価の幾何ブラウン運動
μ＝期待収益率、σ＝株価のボラティリティー(標準偏差)

例：年当たり期待収益率が 15%、年当たりボラティリティーが 30%の株価を考える。この株価を支配する確率微分方程式

$$dS(t)=0.15S(t)dt+0.3S(t)dw(t)$$

近似式で考えると、

$$\Delta S(t)=0.15S(t)\Delta t+0.3S(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

現時点での株価が 100 円として、1 週間後の株価変化を考えると(1/52＝0.0192)

$$\Delta S(0.0192)=0.15\times 100\times 0.0192+0.3\times 100\varepsilon\sqrt{0.0192}=0.288+4.16\varepsilon$$

1 週間後の株価上昇は平均値 0.288 円、ボラティリティー4.16 円の正規分布に従う

株価を支配する確率微分方程式の近似式

$$\Delta S(t)=\mu S(t)\Delta t+\sigma S(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta S}{S(t)}=\mu\Delta t+\sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

➪　$\Delta S/S$は平均値$\mu\Delta t$、標準偏差$\sigma\sqrt{\Delta t}$の正規分布に従う

５.３　伊藤のレンマと株価の対数正規分布

伊藤型の確率過程

$$dx(t)=a(x,t)dt+b(x,t)dw(t) \quad ・・・・・①$$

①式に従う確率過程xと時間tの関数$G(x,t)$を考える

伊藤の補題(Ito’s Lemma)：関数$G(x,t)$は以下の確率過程に従って変動する

$$dG(x,t)=[\frac{\partial G(x,t)}{\partial x}a(x,t)+\frac{\partial G(x,t)}{\partial t}+\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 G(x,t)}{\partial x^2}b(x,t)^2]dt+\frac{\partial G(x,t)}{\partial x}b(x,t)dw(t)$$

(証明：省略)

株価が幾何ブラウン運動によって記述されるとき、

$$dS(t)=\mu S(t)dt+\sigma S(t)dw(t)$$

このとき、関数 $G(S,t)$ を支配する確率微分方程式

$$dG(S,t) = [\frac{\partial G(S,t)}{\partial S}\mu S(t) + \frac{\partial G(S,t)}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 G(S,t)}{\partial S^2}\sigma^2 S(t)^2]dt + \frac{\partial G(S,t)}{\partial S}b(S,t)dw(t)$$

T 年に受け渡される株式の先物契約：リスク・フリー利子率＝r

時刻 t での株価 $S(t)$、時刻 t での先物価格 $F(t)$、満期までの長さ $T-t$

$$F(t) = S(t)e^{r(T-t)}$$

先物価格 $F(t)$ に伊藤の公式を適用すると

$$\frac{\partial F}{\partial S} = e^{r(T-t)},\quad \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = 0,\quad \frac{\partial F}{\partial t} = -rS(t)e^{r(T-t)}$$

$$dF(S,t) = [e^{r(T-t)}\mu S(t) - rS(t)e^{r(T-t)}]dt + e^{r(T-t)}\mu S(t)\sigma S(t)dw(t)$$

$F(t) = S(t)e^{r(T-t)}$ を代入すると、

$$dF(S,t) = (\mu - r)F(t)dt + \sigma F(t)dw(t)$$

先物価格 $F(t)$ も幾何ブラウン運動に従う

関数 $G(S,t) = \ln S(t)$ とすると、

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S(t)},\quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S(t)^2},\quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$ なので、

$$dG(t) = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dw(t)$$

$G(S,t) = \ln S(t)$ はドリフト係数（$\mu - \sigma^2/2$）、分散係数（σ）をもつ一般化ウィーナー過程に従う。

したがって、

$\ln S(t) - \ln S(0)$ は平均値（$(\mu - \sigma^2/2)t$）、標準偏差（$\sigma\sqrt{t}$）の正規分布

５．４　ブラック＝ショールズの方程式

株式の収益率＝ $\Delta S/S$

$$\Delta S(t) = \mu S(t)\Delta t + \sigma S(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta S}{S(t)} = \mu\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

株価が幾何ブラウン運動に従う ➪　株式の収益率は正規分布に従う

$\Delta S/S$ の期待値 $\mu\Delta t$、標準偏差 $\sigma\sqrt{\Delta t}$

株価が幾何ブラウン運動に従うならば、

$$d\ln S(t) = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dw(t)$$ ➪　株価は対数正規分布に従う

株価が幾何ブラウン運動

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dw(t)$$

に従う。

安全資産の価格 B が微分方程式

$$dB = rBdt$$

に従う

　このとき、この株式を原資産とする派生商品の価格を $f(S,t)$ と表記すると、偏微分方程式

$$\frac{\partial f(S,t)}{\partial t}+\frac{\partial f(S,t)}{\partial S}rS+\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 f(S,t)}{\partial S^2}\sigma^2 S^2=rf(S,t)$$ ➪　ブラック＝ショールズ方程式という

が成立する。

（証明省略）

具体的な派生商品の価格は、境界条件を与えるとき導出できる

例：ヨーロピアン・コール・オプションのケースでは、境界条件は

$$f(S,T)=\max(S-K,0)$$

プット・オプションでは、境界条件は

$$f(S,T)=\max(K-S,0)$$

となる。この境界条件の下で上式を解くと以下の公式が得られる。

ブラック＝ショールズの公式：無配当株式を原資産とする権利行使価格 K のヨーロピアン・オプション、現時点での株価＝S_0、リスク・フリー利子率＝r、満期までの期間長＝T

コール・オプションの価格 c とプット・オプションの価格 p は以下の式で計算される

$$c=S_0N(d_1)-Ke^{-rT}N(d_2),$$
$$p=Ke^{-rT}N(-d_2)-S_0N(-d_1)$$

ここで、$N(x)$ は正規分布の累積分布関数で、

$$d_1=\frac{\ln(S_0/K)+(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},\quad d_2=\frac{\ln(S_0/K)+(r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}=d_1-\sigma\sqrt{T}$$

以上