

ゲーム理論の基礎：ナッシュ均衡 とサブゲーム完全均衡

増山 幸一

明治学院大学経済学部

2014年11月 in progress

目次

1	ゲームとは何か	1
2	ゲームの構造とプレイヤーの合理的行動	2
2.1	ゲームにおける行動の合理性	2
2.2	最適反応と支配戦略	4
3	戦略形ゲームにおけるナッシュ均衡 (Nash Equilibrium) の特徴	6
3.1	ナッシュ均衡の定義	6
3.2	複数均衡の存在	7
3.3	複数均衡: The Hawk-Dove Game	8
4	戦略形ゲームにおける混合戦略: Mixed Strategies	9
5	展開形ゲーム	13
5.1	完全情報のもとでの展開形ゲーム	13
5.2	サブゲーム完全均衡	15

1 ゲームとは何か

以下の例を最初に取り上げる。

例 1.1 (第一の例)

太郎と花子は翌日に2つの課題、試験を受けること、プレゼンを行うことの課題に直面している; 試験のための勉強をするか、または、プレゼンのために準備をするかの選択に直面している。

この例での利得 (ペイオフ) を以下のように定めにする。試験のための勉強をすると、試験で92点を獲得できる、勉強しないとき80点となる。プレゼンはパートナーと二人で行わなければいけない。このとき、両者が準備したときに100点、一人だけが準備したときは92点、両者とも準備しないときは84点と予想される。

獲得できる平均点の計算：

1. 太郎と花子の両者がプレゼンの準備をするならば、両者は試験で80点、プレゼンで100点、平均点90点を獲得できる。
2. 両者が試験勉強をするときには、両者とも試験で92点、プレゼンで84点、平均で88点を獲得できる。
3. どちらか一人が試験勉強、もう一人がプレゼンの準備をするとき、試験勉強をした方は、試験で92点、プレゼンで92点、平均で92点を獲得できる。プレゼンの準備をした方は、プレゼンで92点、試験で80点、平均で86点を獲得できる。この利得をもとにゲームの利得表を表現すると、以下の通りとなる。二つの数値ペアの最初の値が太郎の利得で、2番目の値が花子の利得である。

		花子	
		プレゼンの準備	試験勉強
太郎	プレゼンの準備	(90, 90)	(86, 92)
	試験勉強	(92, 86)	(88, 88)

Figure 1 Exam or presentation?

ゲームの構成要素は以下の通りである。

- (a) 参加者の集合：プレイヤー (*players*) と呼ぶ。プレイヤーが k 人いるとき、プレイヤーの集合を $N = (1, 2, \dots, k)$ と表記する。以下では2人ゲームを考えるので、 $k = 2$ である。
- (b) どのように行動するかについての選択の集合：戦略 (*strategies*) の集合と呼ぶ。プレイヤー i の戦略集合を $S_i, i = 1, 2$ とする。プレイヤー 1 の戦略集合は n 個の戦略からなり、 $S_1 = \{(s_1)\} = (s_1^1, s_1^2, \dots, s_1^n)$ と表記され、プレイヤー 2 の戦略集合は m 個の要素からなり、 $S_2 = \{(s_2)\} = (s_2^1, s_2^2, \dots, s_2^m)$ と表現される。 $n \neq m$ を許容する。
- (c) 各戦略に対して、他のプレイヤーが選んだ戦略に依存する支払い (利得、*payoff*) を受け取る、ペイオフ (利得) は通常数値であり、プレイヤーはより大きな数値を選好する：ペイオフ行列 (*payoff matrix*) として表現される。プレイヤー i の利得を各プレイヤーの戦略の関数として、 $\pi_i = \pi_i(s_1, s_2)$ とかく。

以下では、2人プレイヤーによるゲームのみを取り上げる。ワンショット・ゲームとは、各プレイヤーは同時にそして独立に彼らの行為を選択して、一回だけゲームをすることである。

2 ゲームの構造とプレイヤーの合理的行動

2.1 ゲームにおける行動の合理性

以下のような基礎的な仮定をおく。

1. 各プレイヤーが関心を持つすべてのことはプレイヤーのペイオフによって表現されている。「図1 試験-プレゼン」のゲームでは、二人のプレイヤーは自分の平均得点のみを最大化することに専念している。しかし、ゲーム理論は、各プレイヤーが自己の報酬のみに興味を持ってい

る事態を要求している訳ではない。例えば、あるプレイヤーが自己の便益のみならず、他のプレイヤーの便益も配慮している場合、この利他主義はプレイヤーのペイオフ行列に反映されていると考える。

2. 各プレイヤーはゲームの構造のすべてについて知っている。第1に、各プレイヤーは自己の可能な戦略のリストを知っている。第2に、各プレイヤーは対戦相手が誰であり、この対戦相手がどのような戦略集合を保有し、それらに対応するペイオフがどうであるかについて知っている。図1での試験プレゼンのゲームでは、二人のプレイヤーは、試験準備をするか、プレゼン準備をするかの2種類の選択に直面し、そのときのペイオフの数値を知っている。^{*1}
3. 各プレイヤーは、他のプレイヤーが採用するであろう戦略に関する自己の予想をもとに、自らのペイオフを最大化する。個人合理性 (*rationality*) の仮定という。すなわち、各個人は彼自身のペイオフを最大化することを欲する。さらに、各プレイヤーは自ら選んだ最適戦略を実現できると仮定する。

the Exam-or-Presentation Game における選択の合理的決定

花子が選択する戦略に対して太郎は何をすべきか？

- i. 最初に、花子が試験のための勉強をするだろうと知ったならば、自らも勉強することにより88点、プレゼンの準備をすることから86点のペイオフを得るだろう (ペイオフ行列を参照)
→ だから、勉強することを選ぶ
- ii. 他方で、花子がプレゼンのための準備をするだろうと知ったならば、太郎もプレゼンの準備をすると90点が、試験勉強をすると92点が獲得できるだろう
→ だから、勉強することを選ぶ

この思考実験から、花子がいかなるチョイスをしようとも、太郎は試験勉強することを選択すべきことが分かる。他のいかなる戦略よりも大きいペイオフを与える戦略を「厳密な支配戦略」(*strictly dominant strategy*) という。試験勉強する戦略が厳密な支配戦略となる。花子も同じ様に考えるので、試験勉強する戦略が厳密な支配戦略となる。→ ゲームの結果、(88, 88) に落ち着く

二人が協力して、互いにプレゼンの準備をするを選べば、より大きなペイオフ (90, 90) が得られる筈である。しかし、互いが自己の利得を最大化することを考えて、合理的に行動する限り、これは実現不可である。なぜなら、非協力的状況では、各プレイヤーは自己の利得の大小を基準にして、裏切る可能性が高いからである。

非協力ゲームの有名な例、*The Prisoner's Dilemma* (囚人のジレンマ) を取り上げる。

例 2.1 (囚人のジレンマ)

二人に容疑者が逮捕され、別々の部屋に留置された。警察は二人が銀行強盗を行った犯人であると確信していたが、証拠が無かった。逮捕時に強く抵抗したので、この軽犯罪で立件できる。二人の容疑者は以下の様に、取り調べで言われた。「君が自供し (*confess*)、共犯者が自供しなければ (*not confess*)、あなたは解放され、相手は強盗罪で起訴される。そのとき、相棒は10年の実刑判決を受けるだろう。君が自供し、相棒も自供すると、嘆願により、4年の実刑に軽減される。君も自供

^{*1} 各プレイヤーが不完全な情報しか保有できない場合への研究は John Harsanyi などによって行われ、その業績は1994年のノーベル賞受賞となった

せず、相棒も自供しないとき、両者とも公務執行妨害の罪で1年の実刑となる。君の相棒も同じことを伝えられている。」

この例は、以下の利得表をもつ二人の囚人同士のゲームとして表現できる。

		囚人 2	
		NC	C
囚人 1	NC	(-1, -1)	(-10, 0)
	C	(0, -10)	(-4, -4)

Figure 2 Prisoner's Dilemma

試験ープレゼンのゲームと同じ様に、思考実験をすると、自供 (C) が支配戦略となる。→ (-4, -4) がゲームの結果となる

the Prisoner's Dilemma の含意を理解するために、以下のゲームの例を取り上げる。

例 2.2

プロフェッショナル・スポーツにおける薬物使用

		Athlete 2	
		Don't use drugs	Use drugs
Athlete 1	Don't use drugs	(3, 3)	(1, 4)
	Use drugs	(4, 1)	(2, 2)

Figure 3 Performance-enhancing drugs

各選手の最適な戦略 (支配戦略) は「薬物を使用する」になり、ゲームの結果は (2, 2) となる。これは軍拡競争 (arms race) のモデルと呼ばれているもので、各国が軍事的均衡を保つために、危険な武器を大量に備蓄する国家間軍事競争をモデル化した例である。

2.2 最適反応と支配戦略

二人ゲーム

$$G = \{S_1, S_2; \pi_1, \pi_2\}, S_1 = \{(s_1)\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, S_2 = \{(s_2)\} = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$$

を考える。

定義 2.1

プレイヤー 2 の戦略が s_2 であるとき、プレイヤー 1 の戦略 s_1^* が自己の利得を最大化しているとき、戦略 s_1^* はプレイヤー 1 の最適な反応 (best response) であるという。すなわち、プレイヤー 1 の任意の戦略 $a_i \in S_1$ に対して、

$$\pi_1(s_1^*, s_2) \geq \pi_1(a_i, s_2), i = 1, 2, \dots, n$$

が成立つならば、プレイヤー 2 の戦略が $s_2 \in S_2$ であるとき、戦略 s_1^* はプレイヤー 1 の最適な反応である。厳密な不等式

$$\pi_1(s_1^*, s_2) > \pi_1(a_i, s_2), i = 1, 2, \dots, n$$

が成立つ場合、厳密に最適な反応 (strictly best response) であると言う。プレイヤー 2 に対しても、同様に定義される。

ライバル・プレイヤーのすべての戦略 $s_2 \in S_2$ に対して、プレイヤー 1 の最適な反応となる戦略をプレイヤー 1 の支配戦略 (*dominant strategy*) という。ライバル・プレイヤーのすべての戦略に対して、プレイヤー 1 の厳密に最適な反応となる戦略をプレイヤー 1 の厳密な支配戦略 (*strictly dominant strategy*) という。各プレイヤーが厳密な支配戦略を持っているならば、彼 (彼女) はその戦略を採用する筈である。プレイヤーが支配戦略を持つとき、支配戦略は複数個存在する可能性もある。ユニークな戦略になるか否かは不明である。

一人のプレイヤーだけが支配戦略をもつゲームの例を取り上げる。

例 2.3

2 企業が新製品を市場に投入する計画：低価格版と高級価格版のどちらかを計画している。消費者は 2 つの市場セグメントに分かれる、すなわち、低価格版市場と高級価格版市場に分かれている。

仮定：

- (1) 人口の 60 % が低価格版を選好している。人口の 40 % が高級バージョンを選好する。
- (2) 企業 1 は相対的に有名なブランド企業で、同一市場では 80 % の市場占有率を持つ。企業 2 は 20 % の市場占有率をもつ。
- (3) 両企業が異なる市場セグメントに製品を投入したとき、各企業の当該市場セグメントの全部を占有する。すなわち、低価格版市場からは 0.6 のペイオフ、高級市場からは 0.4 のペイオフを得る。
- (4) 両企業が低価格版市場に参入したとき、企業 1 は $0.6 \times 0.8 = 0.48$ のペイオフを、企業 2 は $0.6 \times 0.2 = 0.12$ のペイオフを得る。
- (5) 両企業が高級市場に参入したとき、企業 1 は $0.4 \times 0.8 = 0.32$ のペイオフを、企業 2 は $0.4 \times 0.2 = 0.08$ のペイオフを得る。

		Firm 2	
		Low-priced	Upscale
Firm 1	Low-priced	(.48, .12)	(.60, .40)
	Upscale	(.40, .60)	(.32, .08)

Figure 5 Marketing strategy

このゲームでは、企業 1 は支配戦略を持ち、支配戦略は「low-priced」を採用する。企業 1 が「low-priced」を選ぶとき、「upscale」を選択の方が望ましい。企業 1 が「upscale」を選ぶとき、「low-priced」を選択することが望ましい。企業 2 は支配戦略を持たないが、企業 2 は企業 1 が選んだ市場セグメントと異なる市場に参入することが望ましい。企業 2 が企業 1 のペイオフを知っていて、ペイオフ最大化を選択することを知っていれば、企業 2 は企業 1 が「low-priced」を選択することを予想できる。 → 企業 2 は戦略「upsclae」を選択する；ゲームは (0.60, 0.40) に結果する。

この結果を導いた仮定の一つは、各プレイヤーはライバルのペイオフを知っているとしたこと。第 2 に、ライバル・プレイヤーがペイオフを最大にする戦略を採用することを知っていると仮定した。この仮定を、各プレイヤーはゲームの「共通知識 (*common knowledge*)」を持つという。共通知識の不完全性を導入すると、分析は非常に複雑になる。

3 戦略形ゲームにおけるナッシュ均衡 (Nash Equilibrium) の特徴

3.1 ナッシュ均衡の定義

すべてのプレイヤーが支配戦略を持たないとき、ゲームの解はどうなるか？

例 3.1 (A Three-Client Game)

支配戦略を持たないゲームの例、2企業間のマーケティング・ゲームを考える。各企業は三つの大規模顧客 A, B, C の中の1つとビジネスを行いたいと計画している。各企業は A, B, C のどれと契約するかを選択したい。

- (1) 両企業が同一のクライアントにアプローチするとき、各企業は半々のペイオフが得られる。
- (2) 企業1は規模が小さいので、独自でビジネスを実行できない。企業2の協力がなければ、ペイオフはゼロとなる。
- (3) 企業2が独自に B または C との間でビジネスをすれば、ビジネスの成果をすべて入手できる。
- (4) クライアント A は巨大なビジネスを提供し、総計で8のペイオフを生み出すが、 B または C との間のビジネスは2のペイオフを生む。

このゲームの利得表は以下のようになる。

		Firm 2		
		A	B	C
Firm 1	A	(4, 4)	(0, 2)	(0, 2)
	B	(0, 0)	(1, 1)	(0, 2)
	C	(0, 0)	(0, 2)	(1, 1)

Figure 6 Three-client game

定義 3.1 (Nash Equilibrium)

プレイヤー1が戦略 s_1^* を取り、プレイヤー2が戦略 s_2^* を選択しているとする。 s_1^* が s_2^* に対するプレイヤー1の最適反応戦略であり、 s_2^* が s_1^* に対するプレイヤー2の最適反応戦略であるならば、戦略の組 (s_1^*, s_2^*) はナッシュ均衡であるという。^{*2}

ナッシュ均衡は均衡概念である：二人のプレイヤーが互いに最適な戦略を選択しているならば、どちらか一方がこの戦略から逸脱する動機は存在しない。

Three-client ゲームのナッシュ均衡：

企業2が A を選択するとき、企業1の最適反応は A ；企業2が $B(C)$ を選択するとき、企業1の最適反応は $B(C)$ である。

企業1が A を選択するとき、企業2の最適反応は A ；企業1が $B(C)$ を選択するとき、企業2の最適反応は $C(B)$ である。

互いに最適反応になっている戦略の組は (A, A) だけ = ナッシュ均衡

^{*2} 1950年に John Nash がナッシュ均衡と言う強力な解概念を提案した。(1994年にノーベル賞受賞)

ナッシュ均衡は以下のように定義される。ゲーム

$$G = \{S_1, S_2; \pi_1, \pi_2\}, S_1 = \{(s_1)\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, S_2 = \{(s_2)\} = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$$

とする。

(1) プレイヤー 2 の戦略が s_2^* であるとき、プレイヤー 1 の利得を最大にする戦略は s_1^* 、つまり

$$\pi_1(s_1^*, s_2^*) \geq \pi_1(a_i, s_2^*), i = 1, 2, \dots, n$$

である、

(2) プレイヤー 1 の戦略が s_1^* であるとき、プレイヤー 2 の利得を最大にする戦略は s_2^* である、つまり、

$$\pi_2(s_1^*, s_2^*) \geq \pi_2(s_1^*, b_j), j = 1, 2, \dots, m$$

である、という 2 条件が成立するならば、戦略の組 (s_1^*, s_2^*) はナッシュ均衡 (解) であるという。

第 1 の条件は、プレイヤー 1 がプレイヤー 2 の戦略を s_2^* と予想するとき、プレイヤー 1 の最適戦略が s_1^* となっていることを意味する。第 2 の条件は、プレイヤー 2 がプレイヤー 1 の戦略を s_1^* と予想するとき、プレイヤー 2 の最適戦略が s_2^* になっていることを意味する。この 2 条件が成立することは、相手が戦略を変化させない限り、自分も戦略を変えないことを含意する。言い換えると、これらの条件が同時に成立することは、各プレイヤーの相手プレイヤーの行動に対する予測が実際に実現していることを意味する。しかし、ナッシュ解はただ一つとは限らない。複数のナッシュ解が存在することもある。

3.2 複数均衡の存在

ナッシュ均衡が複数個存在するとき、どうするか？この問題を考えるにあたって、協力ゲーム (A Coordination Game) と呼ばれる例を取り上げる。

例 3.2 (プレゼン資料作成のゲーム)

太郎と花子が共同でプロジェクトのプレゼン資料 (スライド) を作成するケースを考える。MS の PowerPoint を使うか、Apple の Keynote を使用するかを互いに提案するとしよう。二人が異なるソフトを用いると、スライドを統合することに手間がかかる。このケースにおける利得表は以下のようになっているとする。

		花子	
		PowerPoint	Keynote
太郎	PowerPoint	(1, 1)	(0, 0)
	Keynote	(0, 0)	(1, 1)

Figure 7 Coordination game

協力ゲームといわれる理由は、両プレイヤーの共有された目的が同じ戦略を選ぶように協調することにあるからである。協力ゲームの例として、

互いに共同作業をする 2 つの企業が計測基準をメートル式にするか、イギリス式にするか決める
軍を構成する 2 つの小隊が敵陣の左翼を攻撃するか、右翼を攻撃するかきめる

混雑したショッピング・モールで落ち合う場所をモールの北出口にするか、南出口にするか決めるなどがある。協力ゲームでは、通常、ナッシュ均衡は複数存在する。 → どれが実現する可能性が高いかという疑問が生じる。^{*3}。

分離帯のない田舎道で2台の車が出会ったとき、右側を走るか、左側を走るかを決める必要がある。互いが戦略を協調しないと、車は衝突して、事故になる。こうしたケースでは、社会的慣習 (social convention) が協調を動機づける。ちなみに、日本では左側通行を慣習とする。米国では、右側通行が慣習である。

協力ゲームの一例

例 3.3 (the Battle of Sexes)

夫妻と一緒に映画を観に行くことを望んでいる。ロマンス・コメディ映画かアクション映画か？ 協調する必要がある。

		<i>wife</i>	
		<i>romance</i>	<i>action</i>
<i>husband</i>	<i>romance</i>	(1, 2)	(0, 0)
	<i>action</i>	(0, 0)	(2, 1)

Figure 9 Battle of the sexes

例 3.4 (Stag Hunt Game)

二人のハンターが協力すれば、シカ (stag) をし留めることができるが、一人だけではウサギ (hare) しか捕まえられない。一人のハンターがシカを捕らえようとする、彼は何も得られないが、もう一人のハンターはウサギを捕らえられる。

		<i>hunter 2</i>	
		<i>hunt stag</i>	<i>hunt hare</i>
<i>hunter 1</i>	<i>hunt stag</i>	(4, 4)	(0, 3)
	<i>hunt hare</i>	(3, 0)	(3, 3)

Figure 10 Stag Hunt game

このゲームのナッシュ均衡：(hunt stag, hunt stag) と (hunt hare, hunt hare)

3.3 複数均衡: The Hawk-Dove Game

例 3.5 (非協力ゲームの例: Hawk-dove game)

二匹の動物が食料を互いの間でどのように配分するかを決める競争を考える。各動物はアグレッシブに行動する戦略 (タカ hawk 戦略)、または、受動的に行動する戦略 (ハト dove 戦略) を取ることができる。二匹の動物が共に受動的な行動をする場合、3 のペイオフを得る。一匹の動物がアグレッシブに行動するとき、食料の大半を取ることができ、ペイオフは 5 である。受動的に行動した動物の取り分は 1 のペイオフとなる。二匹の動物が共にアグレッシブに行動するときは、食料を破壊してしまい、ペイオフはゼロである。このゲームの利得表は以下の通りである。

^{*3} Thomas Schelling による focal point の提案 (2005 年にノーベル賞受賞)

		animal 2	
		dove	hawk
animal 1	dove	(3, 3)	(1, 5)
	hawk	(5, 1)	(0, 0)

Figure 12 Hawk-Dove game

このゲームのナッシュ均衡： (D,H) と (H,D) である。このうち、どの均衡が実現するか？

試験—プレゼンのゲームも、ペイオフが少し変わるだけで、Hawk-dove ゲームになる。例えば、太郎と花子がプレゼンの準備をしないとき、60点の評価しか得られないとすると、下の利得表のようになる。

		花子	
		プレゼンの準備	試験勉強
太郎	プレゼンの準備	(90, 90)	(86, 92)
	試験勉強	(92, 86)	(76, 76)

Figure 13 Exam or presentation game

このゲームのナッシュ均衡は（プレゼン準備、試験勉強）と（試験勉強、プレゼン準備）となる。hawk-dove ゲームと類似の結果である。hawk-dove ゲームは別名でチキンゲームともいわれる。チキンゲームとは、二人の若者が、両端から互いに向き合って一直線上で自動車を走らせて、走り続けるか（この場合、自爆）、よけるか（命拾い）を選択するゲームのことである。

4 戦略形ゲームにおける混合戦略：Mixed Strategies

ナッシュ均衡が存在しないゲームで、あるいは、複数個のナッシュ均衡が存在するゲームで、プレイヤーが取りうる戦略を拡張できないだろうか？ サイコロを投げて、出た目に依存させて、戦略を決めることはできるだろうか？ → 混合戦略 (mixed strategies) という

定義 4.1 (混合戦略)

プレイヤーの混合戦略とは、プレイヤーの各戦略に与えられる確率分布のことである。

例 4.1 (attack-defense games)

アメリカンフットボールのように、一人のプレイヤーはアタッカーのように行動し、他のプレイヤーはデフェンダーのように行動する。アタッカーは攻撃用の2つの戦略 A, B を取れる。デフェンダーは A に対する防御と B に対する防御の2つの戦略を取れる。デフェンダーがアタッカーが採用した攻撃に対する防御を取るなら、デフェンダーはより高いペイオフが得られる。他方で、デフェンダーがアタッカーが採用した攻撃に対して、間違った防御戦略をとるとき、アタッカーはより高いペイオフを得ることができる。

簡単な attack-defense ゲームの代表的な例は Matching Pennies game と呼ばれるゲームである。

例 4.2 (マッチング・ペニー・ゲーム)

二人の人物がそれぞれ手に一枚のペニー (1セント硬貨) をとり、ペニーの表 (head) か裏 (tail) かのどちらかを選んで互いに見せる。プレイヤー 1 は 2 枚のペニーの上面が同じであるとき、プレイ

プレイヤー 2 に自分の 1 ペニーを与える。2 枚のペニーの上面が異なるとき、プレイヤー 2 はプレイヤー 1 に自分の 1 ペニーを与える。このときの利得表は以下のように与えられる。

		player 2	
		Head	Tail
player 1	Head	(-1, +1)	(+1, -1)
	Tail	(+1, -1)	(-1, +1)

Figure 14 Matching Pennies game

マッチング・ペニー・ゲームでは、二人のプレイヤーのペイオフの和はゼロである。ゼロサムゲームという。マッチング・ペニー・ゲームは攻撃における意思決定のメタファーとしてよく使用される。1944 年 6 月の連合軍によるヨーロッパ侵攻において、連合軍はイギリス海峡を越えてノルマンディーに上陸するか、カレーに上陸するかを選択に迫られ、ドイツ軍はそのどちらに防衛部隊を配置するかを選択をする必要があった。

マッチング・ペニーでは、互いに最適な反応となる戦略の組は存在しない。実際の生活では、このようなマッチング・ペニーのゲームではどのように戦略が選ばれているのだろうか？各プレイヤーが戦略を確率的に選択する可能性を考慮する。混合戦略 (Mixed Strategies) を導入する。

マッチング・ペニー・ゲームでの混合戦略を以下のように定める。プレイヤー 1 が H を選択する確率を p , $0 \leq p \leq 1$ とすると、 T を選択する確率は $1 - p$ である。プレイヤー 2 が H を選択する確率を q , $0 \leq q \leq 1$ とすると、 T を選択する確率は $1 - q$ である。 $p = 1$ のとき、プレイヤー 1 が H を確実に選択するケースを表現する。

プレイヤー 2 は、確率 q で H を、確率 $1 - q$ で T を選択するので、

$$\text{プレイヤー 1 が } H \text{ を選ぶときの期待ペイオフ} = (-1)q + (+1)(1 - q) = 1 - 2q$$

$$\text{プレイヤー 1 が } T \text{ を選ぶときの期待ペイオフ} = (+1)q + (-1)(1 - q) = -1 + 2q$$

もし $1 - 2q > -1 + 2q$ であるならば、プレイヤー 1 の最適な反応は H を選択することである。

もし $1 - 2q < -1 + 2q$ であるならば、プレイヤー 1 の最適な反応は T を選択することである。

マッチング・ペニーには純粋戦略の最適反応は存在しないので、ナッシュ均衡は存在しない。よって、等式

$$1 - 2q = -1 + 2q$$

が成立しなければならない。 $\rightarrow q = 1/2$

プレイヤー 1 はプレイヤー 2 と対称的なので、 $p = 1/2$ が成立する。プレイヤー 2 が確率 $q = 1/2$ で H を選ぶとき、プレイヤー 1 の最適な反応は確率 $p = 1/2$ で H を選ぶことである。 $(p, q) = (1/2, 1/2)$ が混合戦略によるナッシュ均衡となる。

マッチング・ペニー・ゲームにおける混合戦略均衡の意味を考えてみよう。プレイヤー 1 と 2 がそれぞれ確率 p と q でランダムに H を選ぶ状態を想定する。プレイヤー 1 は、プレイヤー 2 が $1/2$ 以上の確率で H を選ぶと予想するならば、 $1 - 2q < -1 + 2q$ なので、彼は T を選択すべきである。

プレイヤー 2 がこのことを知っているならば、プレイヤー 2 は $1/2$ より大きな確率で H を選択すべきでない。なぜなら、プレイヤー 2 は H を選択すると彼の利得は -1 になってしまうから。プレイヤー 2 は、 $1/2$ より大きい確率で T を選択すべきである。よって、これらの戦略の組は互いに最適な反応になっていないので、ナッシュ均衡ではない。プレイヤー 2 の確率 $q = 1/2$ はプレイヤー 1 にとって H または T の選択が無差別になっていることを意味する。プレイヤー 1 の確率 $p = 1/2$ はプレイヤー 2 にとって H または T の選択が無差別になっているを示す。ペイオフ表の数値が対称的なので、 $p = q = 1/2$ という特殊なケースとなっている。

二人ゲーム

$$G = \{S_1, S_2; \pi_1, \pi_2\}, S_1 = \{(s_1)\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, S_2 = \{(s_2)\} = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$$

を考える。プレイヤー i ($i = 1, 2$) の混合戦略を α_i と表記する。上のマッチング・ペニー・ゲームでは、 $\alpha_1 = (\alpha_1(H), \alpha_1(T)) = (p, 1 - p)$, $\alpha_2 = (\alpha_2(H), \alpha_2(T)) = (q, 1 - q)$ となっている。プレイヤー 2 の混合戦略が α_2 であるとき、プレイヤー 1 が H を選択すると、彼の期待利得 $E_1(H, \alpha_2)$ は

$$E_1(H, \alpha_2) = \alpha_2(H)\pi_1(H, H) + \alpha_2(T)\pi_1(H, T)$$

となる。プレイヤー 1 の戦略が T であるときの期待利得は

$$E_1(T, \alpha_2) = \alpha_2(H)\pi_1(T, H) + \alpha_2(T)\pi_1(T, T)$$

である。同様に、プレイヤー 1 の混合戦略が α_1 であるときの、プレイヤー 2 の期待利得、 $E_2(H, \alpha_1)$, $E_2(T, \alpha_1)$ が定義できる。

プレイヤー 2 の混合戦略が α_2 であるとき、プレイヤー 1 の期待利得 $u_1(\alpha_1, \alpha_2)$ は

$$u_1(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{i=1}^n \alpha_1(a_i) E_1(a_i, \alpha_2)$$

と計算できる。同様に、プレイヤー 2 の期待利得も

$$u_2(\alpha_2, \alpha_1) = \sum_{j=1}^m \alpha_2(b_j) E_2(b_j, \alpha_1)$$

と計算できる。

定義 4.2 (混合戦略ナッシュ均衡)

プレイヤー i の混合戦略を α_i 、プレイヤー i 以外の混合戦略を α_{-i} と表記する。すべてのプレイヤーとプレイヤー i のすべての混合戦略 α_i に対して、混合戦略 $\alpha^* = (\alpha_i, \alpha_{-i})$ がプレイヤー i の期待利得を最大にするならば、混合戦略 α^* は混合戦略ナッシュ均衡であると言う。言い換えると、任意の混合戦略 α_i に対して

$$u_i(\alpha_i^*, \alpha_{-i}^*) \geq u_i(\alpha_i, \alpha_{-i}^*),$$

が成立するならば、 α^* は混合戦略ナッシュ均衡である。

上で見た通り、プレイヤー 1 の各期待利得の間に不等式関係、例えば、 $E_1(a_1) > E_1(a_2)$ が成立するならば、 a_1 を選択することが最適な戦略になる。言い換えると、各純粋戦略に対応する期待利得

が等値にならない限り、最適戦略は混合戦略ではなく、純粋戦略とならなければいけない。これは矛盾である。よって、ナッシュ均衡では、各純粋戦略に対応する期待利得は同一の値をとることになる。

例 4.3 (攻撃-防御・ゲーム)

アメリカンフットボールにおける攻撃-防御ゲームを取り上げる。このときの利得表は以下のよう
に与えられる。

		defense	
		defense pass	defense run
offense	pass	(0, 0)	(10, -10)
	run	(5, -5)	(0, 0)

Figure 15 Run-Pass game

防御チームが *pass* に対する防御態勢を選択する確率を q とするとき、*pass* による攻撃を選択する
ならば、攻撃陣の期待利得は

$$0 \times q + 10 \times (1 - q) = 10 - 10q$$

run による攻撃を選ぶならば、期待利得は

$$5 \times q + 0 \times (1 - q) = 5q$$

となる。*pass* と *run* の選択を無差別にする条件は $q = 2/3$ となる。攻撃チームが *pass* の態勢を選
択する確率を p とするとき、防御チームが *pass* に対する防衛態勢を選択するならば、期待利得は

$$0 \times p - 5 \times (1 - p) = -5 + 5p$$

となり、*run* に対する防衛態勢を選ぶならば、期待利得は

$$-10 \times p + 0 \times (1 - p) = -10p$$

となる。二つの選択を無差別にする条件は $p = 1/3$ である。よって、混合戦略均衡は $(1/3, 2/3)$
となる。攻撃チームは $1/3$ の確率でパス攻撃を行い、防御チームは確率 $2/3$ の確率でパス攻撃に備
える戦略の組がナッシュ均衡となり、攻撃チームの期待利得は $10/3$ となり、防御チームの期待利
得は $-10/3$ となる。攻撃チームが確率 $1/3$ でパス攻撃をすると予想するならば、防御チームがこ
れ以外の戦略 ($q \neq 2/3$) を採用すると、防御チームの期待利得は必ず減少することがわかる。

例 4.4 (Penalty-Kick games)

プロサッカーの試合におけるペナルティーキックの 100 個のデータから、キッカーとゴールキー
パーとのゲームの利得が以下の表のようになるとされている。

		Goalie	
		L	R
Kicker	L	(0.58, -0.58)	(0.95, -0.95)
	R	(0.93, -0.93)	(0.70, -0.70)

Figure 16 Penalty-Kick game

このゲームの混合戦略均衡を求めなさい。

5 展開形ゲーム

5.1 完全情報のもとでの展開形ゲーム

チェスや将棋などの日常的に行われているゲームでは、各プレイヤーの手番が交互に回ってくる。このようなゲームは展開形ゲームという。各プレイヤーの手番が交互に連鎖系列をしているようなゲームの様子は以下の新規参入ゲームの例にあるようにゲーム・ツリーで表現できる。

ある市場は独占市場で、既存の独占企業 (*Incumbent*) が市場の供給を独占していたが、この独占市場に新規に参入しようとする企業 (*Challenger*) が登場した。新規企業がこの独占市場に参入する (*In*) か、参入しないか (*Out*) を決めることに直面している。参入した場合、既存の独占企業は対抗策を持って戦うか (*Fight*)、それとも、参入を黙認するか (*Acquiesce*) の決定に直面する。新規企業が参入をして、既存企業がこれに戦うときは、新規企業の利得が 0、既存企業の利得は 0 となる。他方、既存企業が参入を黙認するときは、新規企業及び既存企業の利得は、それぞれ、2、1 となる。新規参入をしないときは、それぞれの利得が 1、2 となる。各プレイヤーの手番は、新規企業が最初の行為を選択し、その後、既存企業が意思決定するという順序になっている。

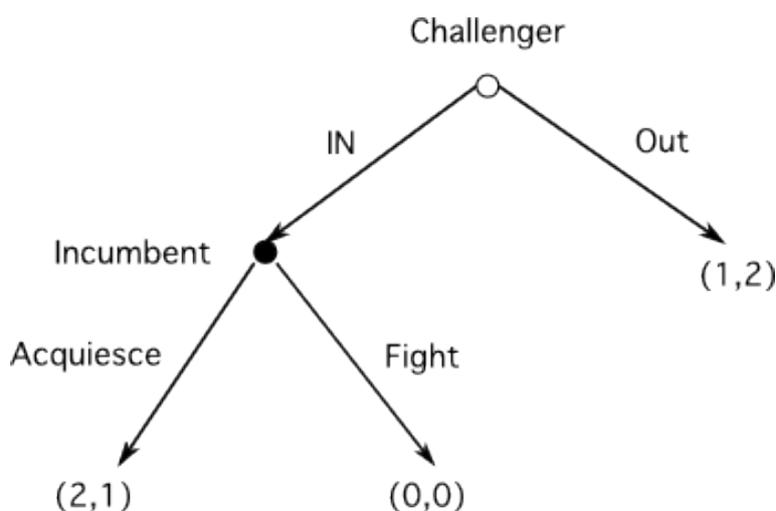


Fig.5.1 新規参入ゲーム

このような展開形ゲームでは、プレイヤーの集合および各プレイヤーの利得関数のみならず、各プレイヤーの手番の順序ならびにその手番でいかなる行為を選択できるかも指定する必要がある。ゲームの終着に至る一連の行為の連鎖系列をゲームの終端を持つ歴史 (*terminal history*) と言い、終着のある歴史の数は終着の種類数よりも多数存在する。さらに、歴史の各時点でどのプレイヤーの手番になるかを記述する必要があるが生じる。これをプレイヤー関数 (*player function*) と呼ぶ。 k 回のプレイヤーの行為の連鎖系列 $\{a^1, a^2, \dots, a^k\}$ の部分歴史 (*subhistories*) とは、プレイヤーの行為が始まっていない歴史、および、行為の連鎖系列 $\{a^1, a^2, \dots, a^m, 1 \leq m \leq k\}$ のすべてを指す。プレイヤーの行為がまだ始まっていない歴史、歴史の始まりを空集合 \emptyset で表現する。この節では、歴史の各時点でプレイヤーが意思決定をする手番において、それまでの歴史において各プレイヤーがいかなる行為を選択してきたかを知っている仮定する。これを完全情報 (*perfect information*) の仮定と言う。

上の新規参入ゲームでは、終着のある歴史は、3種類の連鎖系列

$$h = \{(In, Acquiesce), (In, Fight), (Out)\}$$

となっている。終着を持つ歴史は各プレイヤーに利得をもたらす。新規参入企業の利得関数は

$$\pi_1(In, Acquiesce) = 2, \pi_1(In, Fight) = 0, \pi_1(Out) = 1$$

であり、既存企業の利得関数は

$$\pi_2(In, Acquiesce) = 1, \pi_2(In, Fight) = 0, \pi_2(Out) = 2$$

となっている。終着を持つ歴史の部分歴史は $\{In, \emptyset\}$ である。これらの部分歴史に対応するプレイヤーの手番が指定されている。プレイヤー関数は、

$$Pl(\emptyset) = Challenger, Pl(In) = Incumbent$$

となっている。このゲームでは、新規参入があるとき、既存企業は新規参入を黙認する (*Acquiesce*) 方を選択する。何故なら、対抗策を立てて競争を行うときの利得が 0、黙認するときの利得が 1 なので、黙認した方がより大きい利得となるからである。新規参入に既存企業がこうした反応をすることを予想できるので、新規参入を計画している企業は参入 (*In*) を決定する。このような思考方法を逆向き推論 (*backward induction*) という。

終端を持たないある歴史 h の後に手番がくるプレイヤーの行為が a であるならば、 (h, a) も歴史である。歴史 h の後に手番がくるプレイヤー $Pl(h)$ の行為の集合は (h, a) も歴史になるようなすべての行為 a である。すなわち、

$$S(h) = \{a : (h, a) \text{ がゲームの歴史である} \}$$

と定義される。

例 5.1 (2 段階ゲームの例)

この例では、歴史が始まるときの最初のプレイヤーは 1 である。つまり、 $Pl(\emptyset) = 1$ である。プレイヤー 1 の戦略集合は $S(\emptyset) = \{C, D\}$ である。プレイヤー 2 は、歴史 $h = \{C, D\}$ の後に手番がくる。 $Pl(C) = Pl(D) = 2$ であり、 $S(C) = \{E, F\}$ および $S(D) = \{G, H\}$ となっている。

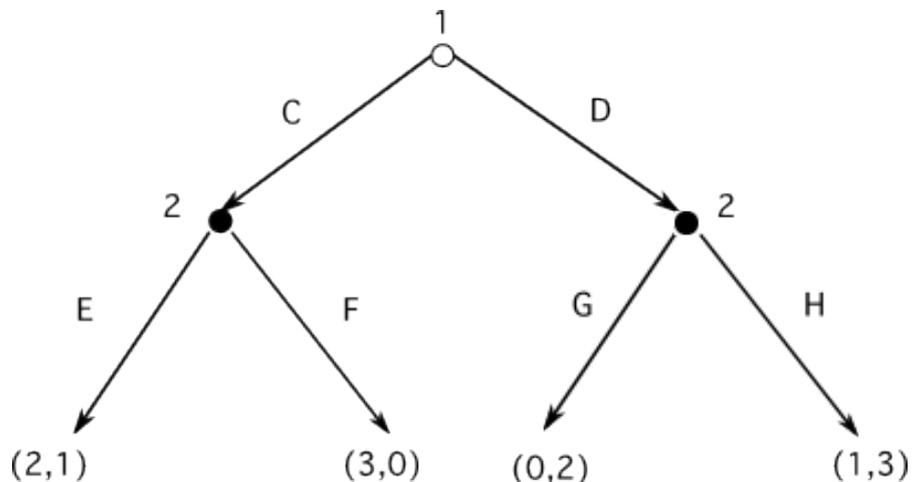


Fig.5.2 2 段階ゲームの例

3段階ゲームの例を以下にあげる。下のゲームツリーを参照のこと。 $Pl(\emptyset) = Pl(C, E) = 1$, $Pl(C) = 2$ である。終端を持つ歴史は $h = \{(C, E, G), (C, E, H), (C, F), D\}$ の4種類ある。

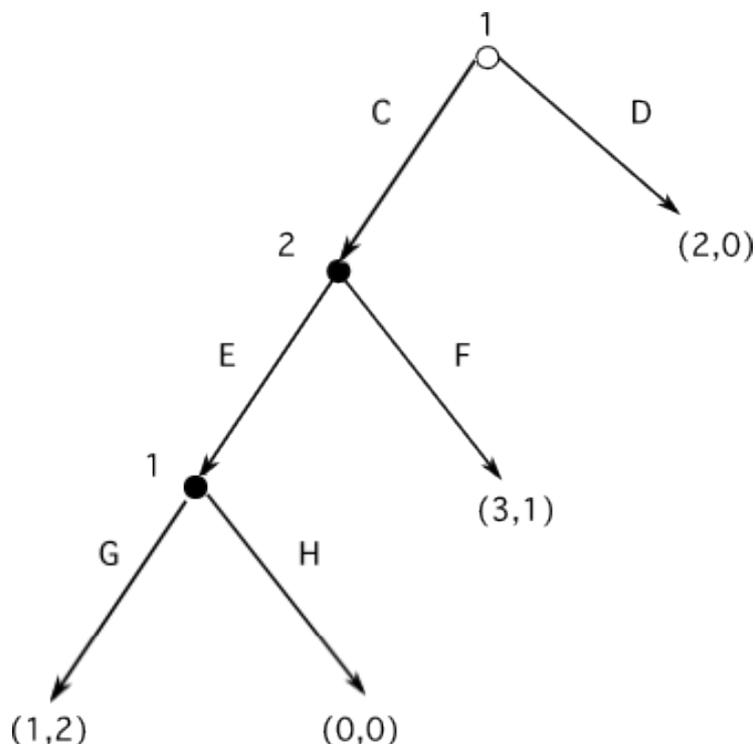


Fig.5.3 3段階ゲームの例

展開形ゲームにおけるプレイヤー i の戦略とは、すべての歴史 h に対して、その歴史の直後に手番になるプレイヤー i ($Pl(h) = i$) が選ぶ一つの行為を割当て関数に他ならない。各プレイヤーの戦略プロファイルが終端を持つゲームの歴史を決める。ゲームの歴史は、プレイヤー $Pl(\emptyset)$ の行為から始まる。プレイヤー $Pl(\emptyset)$ の戦略集合を $S_{Pl(\emptyset)}$ とするとき、彼はその中から一つの行為 $S_{Pl(\emptyset)}(\emptyset)$ を選択する。これを $a^1 = S_{Pl(\emptyset)}(\emptyset)$ とすると、次に、プレイヤー $Pl(a^1)$ の手番となる。プレイヤー $Pl(a^1)$ は、戦略集合 $S_{Pl(a^1)}$ の中から行為 $S_{Pl(a^1)}(a^1)$ を選択する。この行為が $a^2 = S_{Pl(a^1)}(a^1)$ であるなら、歴史 (a^1, a^2) が終端に至らない限り、次の手番は $Pl(a^1, a^2)$ で指定されるプレイヤーの番となる。このようにしてゲームの歴史は続いて行く。

5.2 サブゲーム完全均衡

ゲームの歴史 h が終端を持たない限り、歴史 h の次の手番から出発するゲームは終端を持つ歴史 h' に繋がっている。終端を持たない任意の歴史 h の次の手番から出発するゲームをサブゲーム (subgame) と呼ぶ。下の図は上に掲げた2段階ゲームにおけるすべてのサブゲームである。

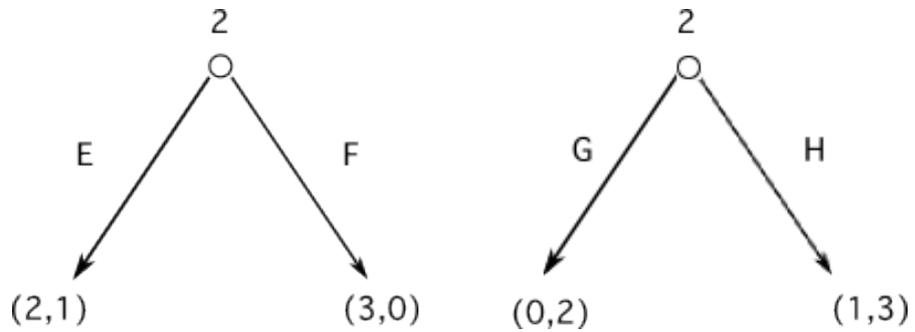


Fig.5.4 2段階ゲームのサブゲームの例

下の図は上記の3段階ゲームにおけるサブゲームを示したものである。

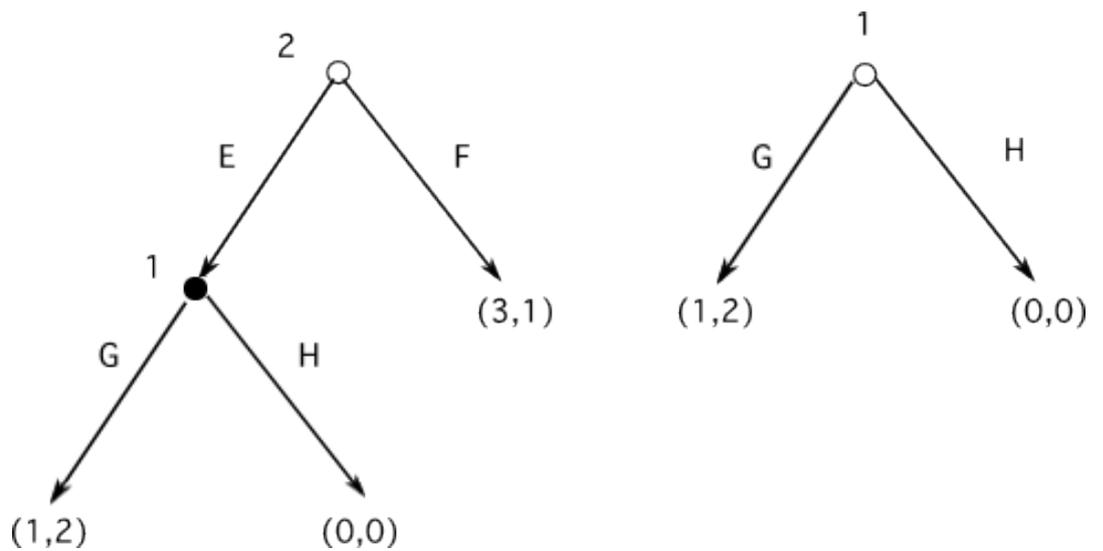


Fig.5.5 3段階ゲームのサブゲームの例

展開形ゲームにおける戦略プロファイル s^* がサブゲーム完全均衡 (subgame perfect equilibrium) となる条件は以下のように定義される。すなわち、いかなるサブゲームにおいても、他のすべてのプレイヤー $j \neq i, j \in N$ が戦略 s_j^* を採用しているとき、どのプレイヤー i も戦略プロファイル s_i^* と異なる戦略を選んで利得を増大させることはできない。言い換えると、ゲームのすべての歴史に沿ってゲームが進行しているとき、任意の時点からのサブゲームにおいて、各プレイヤーの戦略は最適になっていなければならない。更に言うと、すべてのサブゲームにおいて各プレイヤーの戦略プロファイルがナッシュ均衡になっているとき、サブゲーム完全均衡となっている。

以下の性質が証明できる。有限回繰り返される展開形ゲームのサブゲーム完全均衡は、後ろ向き推論法から導出できる戦略プロファイルと一致する。更に、どんな有限な展開形ゲームにおいてもサブゲーム完全均衡が存在する。証明は以下のテキストを参照して下さい。Martin J. Osborne, *An Introduction to GAME THEORY*, 2009, Oxford University Press.

後ろ向き推論を用いてサブゲーム完全均衡を求めるためには、ゲームの最後のサブゲームから出発することが必要である。この最後のサブゲームでナッシュ均衡を求め、次に、一つ前の手番に戻る。この手番から始まるサブゲームを考え、ナッシュ均衡を求める。このようにして、各サブゲームのナッシュ均衡を時間軸では後ろ向きに求めて行き、全体ゲームの最初の手番まで到達したときに、最終的にサブゲーム完全均衡が求まる。

Fig.5.2の2段階ゲームの例では、歴史 $h = (C)$ から始まるサブゲームでは、手番がプレイヤー2で、選択できる戦略は (E, F) の2種類である。プレイヤー2は利得の大きい方を選択するので、 E を選ぶ。また、歴史 $h = (D)$ から始まるサブゲームでは、手番がプレイヤー2で、選択できる戦略は (G, H) の2種類である。プレイヤー2は利得の大きい方を選択するので、 H を選ぶ。歴史を逆向きに辿ると、プレイヤー1の手番になっている。つまり、 $Pl(\emptyset) = 1$ であり、 $S_{Pl(\emptyset)} = \{C, D\}$ となっている。プレイヤー1はプレイヤー2の合理的な行為を予想できるので、戦略 C を選択すると、利得が $(2, 1)$ になること、戦略 D を選ぶと $(1, 3)$ となることを知っている。従って、プレイヤー1は戦略 C を選択することが最適となる。戦略プロファイル (C, E) がサブゲーム完全均衡となっている。同様に、Fig.5.3の3段階ゲームの例に対するサブゲーム完全均衡を求めることができる。歴史 $h = (C, E)$ から始まるサブゲームが最後のサブゲームである。プレイヤー1の手番となっている。つまり、 $Pl(C, E) = 1$ であり、 $S_{Pl(C, E)} = \{G, H\}$ である。 G が最適戦略である。歴史を1段階遡ると、 $Pl(C) = 2$ なので、 $S_{Pl(C)} = \{E, F\}$ となっている。 E を選択すると、プレイヤー2の利得が2、 F を選ぶと1になることが知られている。よって、 E がプレイヤー2の最適戦略ある。更に歴史を遡って行くと、 $Pl(\emptyset) = 1$ であり、 $S_{Pl(\emptyset)} = \{C, D\}$ となっている。サブゲーム完全均衡は (D, E, G) である。部分歴史 $h = (E, G)$ は実際には起こらない。

例 5.2 (サブゲーム完全均衡の例)

以下の図にある新規参入ゲームは Fig.5.2 の2段階ゲームの利得を少々変化させたものです。この新しい参入ゲームのサブゲーム完全均衡を求めて下さい。

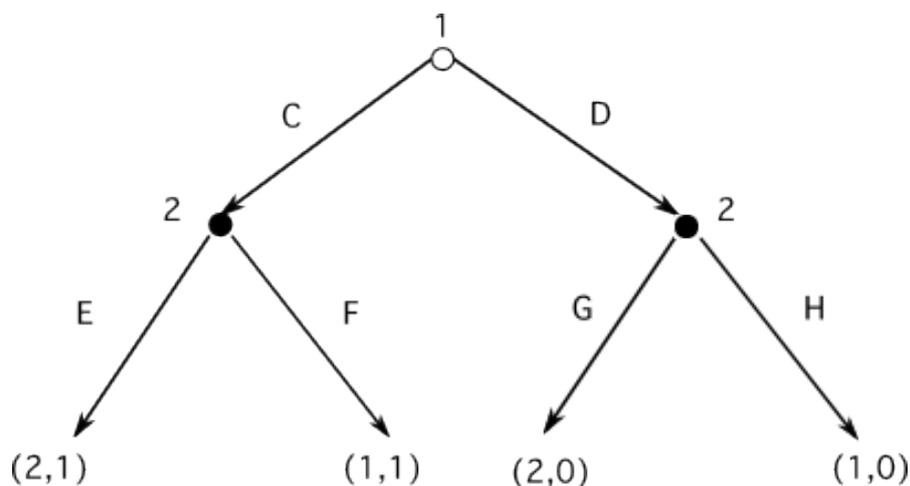


Fig.5.6 2段階新規参入ゲームのサブゲーム完全均衡

この例では、ナッシュ均衡が複数個存在するのと同様に、サブゲーム完全均衡は複数個存在する。