

進化ゲームと交渉ゲーム

増山 幸一

明治学院大学経済学部

2013年5月: in progress version

目次

1	はじめに	1
2	進化ゲーム	3
2.1	進化ゲームの例	3
2.2	進化ゲームの定式化	6
2.3	複製子動学の安定性	8
2.4	社会進化の動学	10
3	交渉と協力のゲーム	11
3.1	交渉ゲーム：公理的アプローチ	11
3.2	交渉ゲーム：戦略的アプローチ	13
3.3	提携ゲームとコア	16

1 はじめに

近年、社会的経済的ネットワークの研究が発展し、経済ネットワークをゲーム論の枠組みで分析する研究が進展してきた。この領域で主として分析ツールとして採用されるモデルは、進化ゲームおよび交渉ゲームとして定式化されるものである。本稿では、進化ゲームおよび交渉ゲームの基礎的な概念と分析枠組みを説明する。戦略形ゲーム論で必須のナッシュ均衡に関する知識は既に学習していると想定する。参考のために、ここで、ナッシュ均衡概念について復習しておく。

プレイヤーの数が n 人で、プレイヤー i の戦略集合が S 、利得が u_i と表現されるとき、ナッシュ均衡は以下のように定義される。 $n = 2$ とおくと、分かり易いと思う。

定義 1.1 (ナッシュ均衡)

戦略プロファイル $s^* = (s_i^*, s_{-i}^*)$ が、条件

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*), \quad \forall s_i \in S, \forall i \in N,$$

を満たすならば、戦略プロファイル s^* はナッシュ均衡であるという。ここで、 s_{-i} はプレイヤー i 以外のプレイヤーの戦略の組を表す。□

ナッシュ均衡では、各プレイヤー i は、ライバルの戦略プロファイル s_{-i}^* を予想した上で、自己の利得を最大にする戦略 s_i^* を選択している。ゲーム理論で周知の通り、各プレイヤーの戦略集合 S が \mathcal{R} 内でコンパクトで、凸な部分集合で、利得関数がすべてのプレイヤーの戦略に関して連続で、自身の戦略の凹関数であるとき、ナッシュ均衡が存在する*¹。各プレイヤーが取る戦略プロファイル $s \in S^n$ が与えられるときの、利得のプロファイルを $u(s) = (u_1(s), u_2(s), \dots, u_n(s))$ と表記する。もし二つの戦略プロファイル $s, s' \in S^n$ に対して、すべてのプレイヤーの利得が不等式 $u_i(s) \geq u_i(s')$ を満たし、かつ、 $u_j(s) > u_j(s')$ なる条件を満たすような利得を持つプレイヤー j が存在するとき、利得プロファイル $u(s)$ は利得プロファイル $u(s')$ を優越する、または支配する (*dominate*) という。

サブゲーム完全均衡 (*subgame perfect equilibrium*) という概念も以下では使用される。ここで、このサブゲーム完全均衡についても復習しよう。このために、ゲームにおける情報構造について定義する必要がある。動学ゲームにおいて、各プレイヤーが自己の手番になったとき、それまでのゲームの歴史を完全に知っているようなゲームを完全情報ゲーム (*perfect information game*) という。そうでないゲームを不完全情報ゲームという。各プレイヤーの利得関数が全プレイヤーの共通知識となっているゲームを完備情報ゲーム (*complete information game*) という。ここでは、完備完全情報ゲームを取り上げる。完備完全情報の動学ゲームの一般的特徴は、(1) 各プレイヤーの手番が交互に回ってくること、(2) 次の手番の前までに、それまでの手番でどのような行動がとられたか知っていること、(3) 各プレイヤーの行動の関数である利得関数が共有知識となっていることである。

理解を容易にさせるために、以下のような完備完全情報の 2 段階 2 人ゲームを考える。

- (1) プレイヤー 1 が戦略空間 S_1 から戦略 s_1 を選択する。
- (2) プレイヤー 2 はプレイヤー 1 の行動を観察した上で、戦略空間 S_2 から戦略 s_2 を選択する。
- (3) この結果、各プレイヤーの利得が決まる。

このゲームでは、各プレイヤーの最適な行動は以下の通りになると予想される。ゲームの第 2 段階でプレイヤー 2 の手番になったとき、プレイヤー 2 は、プレイヤー 1 が行動 s_1^* を選択したことを知ったうえで、自己の利得を最大にする戦略 s_2^* を選択する。プレイヤー 1 は、第 2 段階でプレイヤー 2 が最適反応をすると予想できるので、このことを予想した上で、自己の利得を最大にする戦略を選択する。この解を逆向き推論法 (*backward-induction*) による解という。逆向き推論による解では、第 2 段階になったとき、プレイヤー 2 は自己の利益にならないような戦略をとらない。つまり、プレイヤー 2 の利益にならないような脅しは信憑性を欠く (空脅し)。

上の 2 段階ゲームでの逆向き推論法による解は、一般的に、任意の手番から始まるすべてのサブゲームにおいて合理的な行動、ナッシュ均衡となっている。これをサブゲーム完全均衡という。

第 2.3 節「複製子動学の安定性」および第 2.4 節「社会進化の動学」は一部で微分方程式を取り扱っているので、微分方程式の知識のない読者はそこをスキップして読んで下さい。

*¹ ナッシュ均衡の存在証明は、ゲーム理論のテキストを参照のこと。日本語での標準的なテキストは岡田 (2011) である。英文での標準的なテキストは Fudenberg and Tirole(1981)、Meyerson(1991)、Osborne and Rubinstein(1994) などである。

2 進化ゲーム

2.1 進化ゲームの例

生命体は特定の特性や戦略を選択するような命令が遺伝子に組み込まれて生まれてくる。生命体の多くの行動や特性は多種類の有機体間の相互干渉と関係しており、ある有機体が生存に成功することはその有機体が他の有機体とどのように相互行為を行っているかに依存する。だから、個々の有機体の適応度（適合性、*fitness*）を社会から孤立して測ることができず、その有機体が生存する全集団社会の文脈の中で評価しなければならない。生命体の遺伝子に組み込まれた特性や行動はゲームにおける戦略のようなものと理解でき、生命体の適合性はゲームのペイオフ（利得）と考えられる。そして、このゲームのペイオフは生命体が相互関係する他の生命体の戦略もしくは特性にも依存する。

進化ゲームは自然環境に対する適合性をペイオフ（利得）とする生命のゲーム（*game of life*）である*²。有機体が成功裡に生命を維持出来るならば、より優れた環境適合性を持ち、より多くの子孫を残すことができ、そして、同一の命令が子孫の遺伝子に組み込まれる。自然環境に適応出来なければ、子孫を残すこともできずに死滅する。突然変異が起こることは、親と同一の命令遺伝子を保持せず、実行可能な戦略のなかからランダムに戦略を選択するような生命体が生まれることである。

最初に、進化ゲームの簡単な例を考察する。進化ゲームで最も良く引き合いに出される例は *Hawk-Dove* ゲームであるが、ここでは、最初にカブトムシのゲームを取り上げる。カブトムシの集団を考え、各カブトムシの適合性（*fitness*）は食料を入手して、その食料からいかに効率的に体力を維持できるような栄養分を獲得できるかに依存する。ある突然変異が起こり、大きなサイズのカブトムシが生まれるとする。この突然変異で生まれた大きなカブトムシは、大きな体の新陳代謝を維持するために、食料からより多量の栄養分を摂取する必要がある。これは大きなサイズのカブトムシにとって環境適応度を引き下げる要因ともなる。個々のカブトムシは互いに他のカブトムシと食料を巡って競争をする。彼らが食料源を探り当てたとき、互いに出来る限り多くの食料を獲得しようとする競争するカブトムシの集団が群れる。体の大きなカブトムシは、当然のことながら、他のカブトムシに比較して、平均以上の食料を手に入れることが出来る。説明を簡単化するために、カブトムシ集団間における食料競争を、二匹のカブトムシの食料争奪戦とする。食料源が見つかったとき、2匹のカブトムシ間における競争結果は以下ようになるであろう。同一サイズのカブトムシが出会ったとき、食料は半分ずつ分け合うことになる。大きいサイズのカブトムシと小さいカブトムシが競争するときは、大きいカブトムシが大部分の食料を手に入れてしまい、小さい方は少しの食料しか手に入らない。大きいカブトムシ同士がであったときは、均等に食料を分け合うが、大きな体の新陳代謝を維持するためには十分でない栄養分しか獲得できない。

この進化ゲームでは、各カブトムシは二つの戦略、小さいサイズの体（*S*）、または大きなサイズの体（*L*）を選択することが出来る。以下の表のようにペイオフが与えられている*³。

*² 進化ゲームは最初、John Maynard Smith(1974) によって提案され、展開された。

*³ 以下のカブトムシの数値例は、Easley and Kleinberg(2010) からの引用である。

		カブトムシ B	
		S size	L size
カブトムシ A	S size	(5, 5)	(1, 8)
	L size	(8, 1)	(3, 3)

カブトムシは、命ある限り、他のカブトムシと食料競争ゲームをしなければならない。非常に多数のカブトムシからなる集団の中から2匹のカブトムシがランダムに選ばれるので、同一の組合せは起きないものとする。カブトムシの全体的な適合性は、各食料競争で体験する適合性の平均値となり、この適合性が再生産を成功させる。つまり、同一の戦略を選択する遺伝子を持つ子孫の数を決定する。

ある生命体の集団の大多数が戦略 S を選択しているとき、この戦略と異なる戦略 (M) を用いる少数の侵入者 (異端種、変異種) グループが数世代の後に死滅するならば、戦略 S は進化的に安定 (*evolutionarily stable*) であるという。集団の大多数が戦略 S を選択しているとき、少数のマイノリティー・グループが採用する戦略 M から得られる適合性は多数派が採用する戦略 S から得られる適合性の大きさより小さい。ある個体の適合性の水準は、集団の中からランダムに選ばれた他の個体との間の相互作用の結果得られる期待利得の大きさである。全集団のうち戦略 M を採用する異端種の割合が x であるとき、全集団のうち戦略 S を選択する割合は $1 - x$ である。以下の条件が成立するとき、戦略 S は進化的に安定した戦略と言う。すなわち、 $x < y$ を満たす任意の実数 x に対して、戦略 S を採用する多数派個体の適合性の大きさが、戦略 M を採用する異端種の適合性の大きさよりも厳密に大きくなるような実数 y が存在する。

この定義を用いて、上記の数値例から、カブトムシの S 戦略が進化的に安定である条件を求めよう。大きなカブトムシが突然変異種だとして、大きなサイズを選ぶカブトムシの割合を x とする。カブトムシが S 戦略を選択するときの期待利得は $5(1 - x) + x = 5 - 4x$ となる。L 戦略を選択するときの期待利得は $8(1 - x) + 3x = 8 - 5x$ となる。S 戦略が進化的に安定であるための条件は

$$5 - 4x > 8 - 5x$$

となる。この不等式は $x > 3$ を要求するが、 $0 < x < 1$ という仮定に矛盾する。よって、S 戦略は進化的に安定ではない。そこで、S 戦略を突然変異種の戦略として、その割合を x とする。S 戦略を選択するときの期待利得は $5x + (1 - x) = 1 + 4x$ 、L 戦略を選択するときの期待利得は $8x + 3(1 - x) = 3 + 5x$ である。L 戦略が進化的に安定な条件は

$$1 + 4x < 3 + 5x$$

である。この条件は x が正である限り、成立する。従って、L 戦略は進化的に安定な戦略となる。カブトムシの集団に突然変種として大きなサイズのカブトムシが生まれるとき、大きなカブトムシは食料競争で小さなカブトムシよりも優位に立てる。この結果、大きなカブトムシの適合性の方が大きいので、大きなカブトムシが増殖し、小さなカブトムシの数は縮小し始め、やがて数世代後に死滅して行く。

実は、上記利得表の右下にある数値、(3, 3) が 0 以下になるとき、例えば、(-1, -1) に変化すると、この進化ゲームにおいて進化的に安定な戦略が変更されなければならないことがわかる。このケースを考察するために、ここで、鷹と鳩のゲーム (*Hawk-Dove game*) における進化的に安定な戦略を考えてみよう。タカとハトのゲームは *Maynard Smith* が用いた例である*4。2匹の動物 (タカとハト) が価値 v を持つ資源を巡って

*4 詳細は、*Maynard Smith*(1982) を参照のこと。

争っている。この資源を入手した個体の適応度が v 増大するので、資源の価値は v である。例えば、有利な縄張りを獲得した動物は 5 匹の子孫を残せるが、この縄張りを手に入れられなかった動物は 3 匹の子孫しか残せないとする。この場合、この縄張りという資源の価値 v は $5 - 3 = 2$ となる。2 匹の動物は 2 種類の戦略、 H (Hawk) 戦略と D (Dove) 戦略をとれる。 H 戦略は相手に戦いを挑み、自分が傷つくか、相手が逃げ出すまで戦う戦略である。他方、 D 戦略は相手に戦いを挑む姿勢を見せるが、相手が戦いを挑んでくるときには、直ちに逃げ出すという戦略である。繁殖地を巡るタカとハトの競争における利得が以下の表に表現されている。

		ハト	
		<i>Hawk</i>	<i>Dove</i>
タカ	<i>Hawk</i>	$(\frac{1}{2}(v - c), \frac{1}{2}(v - c))$	$(v, 0)$
	<i>Dove</i>	$(0, v)$	$(\frac{1}{2}v, \frac{1}{2}v)$

表で与えられる利得を想定した理由は次のように説明される。相手が H 戦略で挑んできたとき、自分が H 戦略で対抗すると、互いに傷を負い、資源を半分ずつ手に入れる。負傷による被害が適応度を c の大きさ分引き下げる。勝敗の確率は 50% ずつである。相手が D 戦略で挑んできたとき、自分が H 戦略で対応すると、相手は負傷する前に逃げ出すので、資源全部を自分のものにできる。自分が D 戦略で挑んだとき、相手も D 戦略で来たならば、負傷もせず、互いに資源を均等に分け合う。

非常に多数の個体からなる集団からランダムに選ばれた 2 匹の個体が資源を巡って争っているとする。 $\pi(i, j)$ を i 戦略を選んだ個体が j 戦略の個体と対戦したとき獲得できる適応度 (利得) とする ($i, j = H, D$)。この集団の中で i 戦略を採用する割合を $1 - p$ 、つまり、戦略 j を選択する個体の割合を p とする。各個体が i 戦略を選んだときの期待適応度を $V(i)$ とする。このとき、各戦略の期待適応度は

$$V(i) = (1 - p)\pi(i, i) + p\pi(i, j), \quad V(j) = (1 - p)\pi(j, i) + p\pi(j, j)$$

となる。突然変異の結果、少数の個体が戦略 j を採用したとする。戦略 i が進化的に安定であるためには、戦略 i をとる個体の適応度が、突然変異によって出現可能などんな他の戦略をとる個体の適応度よりも大きくななければならない。 $V(i) > V(j)$ が成立する必要がある。突然変異による侵入者の割合を p とすると、 $1 \gg p$ である。よって、 p が非常に小さな値だとして、どのような戦略 j に対しても

$$\pi(i, i) > \pi(j, i)$$

または

$$\pi(i, i) = \pi(j, i) \text{ かつ } \pi(i, j) > \pi(j, j)$$

が成立しなければならない。タカ派のシェアが $1 - p$ であるとき、各個体が自分と同じ戦略をとる子供を自分の適応度に比例して生むと考え、次世代タカ派の割合 $1 - p'$ は

$$1 - p' = \frac{(1 - p)V(H)}{pV(D) + (1 - p)V(H)}$$

である。

ここで導いた進化的に安定な戦略の条件式をタカ・ハトゲームに適用する。 $\pi(D, D) < \pi(H, D)$ なので、 D 戦略は進化的に安定ではない。 $v > c$ のときを考える。このとき、 $\pi(H, H) > \pi(D, H)$ が成立するので、 H 戦略は進化的に安定である。次に、 $v < c$ のケースを考える。このケースでは、 H 戦略が進化的に安定であるためには、 $\pi(H, H) = \pi(D, H)$ 、 $\pi(H, D) > \pi(D, D)$ が成立する必要がある。 $\pi(H, H) < \pi(D, H)$ なので、 H 戦略は進化的に安定ではない。進化的に安定な (純粋) 戦略は存在していない。

そこで、進化的に安定な混合戦略が存在するかどうか考える。各個体があるときは H 戦略を、また、あるときは D 戦略をとるという行動をすることもできる。確率 p で H 戦略を、確率 $1 - p$ で D 戦略を採用するとしよう。これを混合戦略 (*mixed strategy*) という。この混合戦略を $\sigma = (p, 1 - p)$ と表記し、混合戦略を採用したときの期待利得を $u(\sigma, j), j = H, D$ と表現する。 $u(\sigma, j) = p\pi(H, j) + (1 - p)\pi(D, j)$ である。 $u(H, \sigma) > u(D, \sigma)$ または $u(D, \sigma) > u(H, \sigma)$ が成立するならば、 σ を選ぶよりも、戦略 D もしくは H を単独で選択する方が利得は大きくなる。この場合、混合戦略 σ は進化的に安定になり得ない。混合戦略 σ が進化的に安定になるためには、 $u(H, \sigma) = u(D, \sigma)$ が成立しなければならない。よって、 $p\pi(H, H) + (1 - p)\pi(H, D) = p\pi(D, H) + (1 - p)\pi(D, D)$ が成立するので、

$$p \frac{v - c}{2} + (1 - p)v = (1 - p) \frac{v}{2}$$

となる。これを p について解くと、 $p^* = v/c$ が得られる。 $v < c$ のとき、この混合戦略 $\sigma^* = (p^*, 1 - p^*)$ が進化的に安定な戦略となる^{*5}。このような進化的に安定な混合戦略が存在することは、各個体が確率 p^* で H 戦略を選び、確率 $1 - p^*$ で D 戦略を選ぶ混合戦略の採用が遺伝子を介して子孫に受け継がれて行くことを意味する。別の見方をすると、タカ派戦略を選ぶ個体数とハト派戦略を持つ個体数が一定の割合、 p^* 対 $1 - p^*$ 、で世代を超えて安定的に維持されるともいえる。

2.2 進化ゲームの定式化

進化ゲームを正確に定式化する。ゲームの参加者 (プレイヤー) の集合を \mathcal{I} 、プレイヤー i の戦略の集合を S_i 、プレイヤー i の利得関数を π_i と表記する。戦略形ゲームは $\{\mathcal{I}, (S_i)_{i \in \mathcal{I}}, (\pi_i)_{i \in \mathcal{I}}\}$ と表記できる。プレイヤー i の戦略集合を $S_i = \{s_1^i, s_2^i, \dots, s_k^i\}$ とし、混合戦略の集合を Σ_i とする。ここで、各プレイヤーの混合戦略 $\sigma_i = \{p_1^i, p_2^i, \dots, p_k^i\} \in \Sigma_i$ は、 $\sum_{j=1}^k p_j^i = 1$ を満たす。 p_j^i は純粋戦略 $s_j^i \in S_i$ を選択する確率である。各プレイヤーの混合戦略の組 $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ のもとでの、プレイヤー i の期待適応度 (効用関数) を $u_i(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ と表現する。混合戦略を含めたゲームの戦略形表現は $\{\mathcal{I}, (\sigma_i)_{i \in \mathcal{I}}, (u_i)_{i \in \mathcal{I}}\}$ となる。

進化ゲームでは、プレイヤーは二人、戦略と利得は対称的なので、 $\mathcal{I} = \{1, 2\}$ 、 $S = S_i$ 、 $\pi = \pi_i$ 、 $i = 1, 2$ である。プレイヤー 1 とプレイヤー 2 の混合戦略の組 (σ_1, σ_2) のもとでの、各プレイヤーの期待適応度を $u(\sigma_1, \sigma_2)$ と表記できる。 $\sigma_1 = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ 、 $\sigma_2 = \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$ であるとき、期待適応度は

$$u(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k p_i \pi(s_i, s_j) q_j$$

と計算される。これらの表記を用いて、進化的に安定な戦略 (*evolutionarily stable strategy, ESS*) は以下のように定義される。

定義 2.1 (進化的に安定な戦略 ESS 1)

任意の戦略 $\sigma \in \Sigma$ ($\sigma \neq \sigma^*$) と、任意の実数 $\epsilon < \bar{\epsilon}$ に対して、

$$u(\sigma^*, \epsilon\sigma + (1 - \epsilon)\sigma^*) > u(\sigma, \epsilon\sigma + (1 - \epsilon)\sigma^*)$$

が成立するような $\bar{\epsilon}$ が存在するならば、戦略 σ^* は進化的に安定であるという。

上のタカ・ハトのゲームの例で既に説明したように、以下のような代替的な定義を与えることができる^{*6}。

^{*5} この混合戦略が進化的に安定になる条件は、 $u(\sigma, H) > u(H, \sigma)$ および $u(\sigma, D) > u(D, \sigma)$ となる。 $v < c$ のとき、この不等式が満たされることは容易にチェックできる。読者の練習問題にする。

^{*6} 進化的に安定な戦略の定義 1 と定義 2 が等価になることの証明は、Weibull(2002) を参照のこと。

定義 2.2 (進化的に安定な戦略 ESS 2)

任意の戦略 $\sigma \in \Sigma$ ($\sigma \neq \sigma^*$) に対して、

$$u(\sigma^*, \sigma^*) \geq u(\sigma, \sigma^*)$$

が成立し、そして、 $u(\sigma^*, \sigma^*) = u(\sigma, \sigma^*)$ を満たすような戦略 $\sigma \in \Sigma$ が存在するならば、

$$u(\sigma^*, \sigma) > u(\sigma, \sigma)$$

が成立するとき、戦略 σ^* は進化的に安定であるという。

周知の通り、任意の戦略 $\sigma \in \Sigma$ ($\sigma \neq \sigma^*$) に対して、 $u(\sigma^*, \sigma^*) \geq u(\sigma, \sigma^*)$ が成立するとき、 σ^* はナッシュ均衡であると言われる。これらの定義からわかる通り、進化的に安定な戦略はナッシュ均衡である。ナッシュ均衡の条件が厳密な不等式で成立しているとき、ナッシュ均衡はユニークに定まる。この場合、ナッシュ均衡は進化的に安定な戦略となる。他方、ナッシュ均衡成立のための不等式が等式で成立している場合、進化的に安定な戦略となるためには、追加的な不等式が要求される。だから、ナッシュ均衡は必ずしも進化的に安定な戦略になるとは限らない。タカとハトのゲームで、 $v > c$ のとき、 H 戦略は進化的に安定な戦略であり、ナッシュ均衡でもある。 $v < c$ のとき、混合戦略 $(v/c, 1 - v/c)$ が進化的に安定な戦略であり、これもナッシュ均衡となる。しかし、下の例で説明するように、ナッシュ均衡が必ずしも進化的に安定な戦略になるとは限らない。また、進化的に安定な戦略 (ESS) はナッシュ均衡になる性質から、進化的に安定な均衡では、必ずしも、社会的に最適な状態が実現しているわけではないことがわかる。

進化ゲームでは各プレイヤーの利得は対称的なので、プレイヤーの利得表を行列で表現できる。2人ゲームは以下のような行列で表される進化ゲームに単純化できる。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

進化ゲームの利得は大小のみが意味を持つので、以下のように書き換えても一般性を失うことはない。

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$$

つまり、 $a_1 = a_{11} - a_{21}$, $a_2 = a_{22} - a_{12}$ とおいた。囚人のジレンマのゲームでは、 $a_1 a_2 < 0$ となっている。この場合、ただ一つのナッシュ均衡が存在し、進化的に安定な戦略の条件も満たす。 $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ のケースは協調ゲームと言われる。このとき、ナッシュ均衡は3種類存在し、 $\sigma_1 = (1, 0)$, $\sigma_2 = (0, 1)$, $\sigma_3 = (\lambda, 1 - \lambda)$ がナッシュ均衡である。ここで、 $\lambda = a_2 / (a_1 + a_2)$ である。 $\sigma_1 = (1, 0)$, $\sigma_2 = (0, 1)$ は厳密な不等式で条件が満たされるので、ESSであるが、 $\sigma_3 = (\lambda, 1 - \lambda)$ はそうではない。なぜなら、不等式 $u(\sigma_1, \sigma_1) = a_1 > u(\sigma_3, \sigma_1) = \lambda_1$ が成立するので、ESSの条件を満たさない。 $a_1 < 0$, $a_2 < 0$ のケースはタカ・ハトのゲームに対応する。この場合も、3種類の戦略 $\sigma_1 = (1, 0)$, $\sigma_2 = (0, 1)$, $\sigma_3 = (\lambda, 1 - \lambda)$ がナッシュ均衡である。 $\sigma = (p_1, p_2) \in \Sigma$ に対して、

$$u(\sigma_3, \sigma) = \lambda a_1 p_1 + (1 - \lambda) a_2 p_2 = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}, \quad u(\sigma, \sigma) = a_1 p_1^2 + a_2 p_2^2$$

なので、ESSのための条件式 $u(\sigma, \sigma) < u(\sigma_3, \sigma) = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}$ が成立すれば、 σ_3 は進化的に安定な戦略となる。協調ゲームとの違いは、 σ_3 が ESS になることである。

下表の利得を持つジャンケン・ゲームを考えよう。通常のジャンケンでは、 $\gamma = 0$ であるが、ここでは、 $0 < \gamma < 1$ とする。

		プレイヤー 2		
		Rock	Paper	Scissor
プレイヤー 1	Rock	(γ, γ)	$(-1, 1)$	$(1, -1)$
	Paper	$(1, -1)$	(γ, γ)	$(-1, 1)$
	Scissor	$(-1, 1)$	$(1, -1)$	(γ, γ)

混合戦略 $\sigma = (1/3, 1/3, 1/3)$ は期待利得 $u(\sigma^*, \sigma^*) = 3/\gamma$ を持つナッシュ均衡となる。しかし、戦略 $\sigma = (1, 0, 0)$ を選択する個体が侵入すると、 $u(\sigma^*, \sigma) = \gamma/3 < u(\sigma, \sigma) = \gamma$ なので、進化的に安定な戦略の条件を満たさない。また、進化的に安定な混合戦略が存在しない。

2.3 複製子動学の安定性

自然進化の過程は通常、新たな種の登場を促す突然変異の過程と、適合性の弱い種が絶滅して行く淘汰の過程から成立っている。ここでは、淘汰過程のダイナミックスを取り上げる。進化的に安定な均衡がダイナミックな自然淘汰の過程を経て、成立するものなのか否か、言葉を換えて言えば、進化的に安定な均衡が異端種の侵入によって摂動をうけたとき、動的な自然淘汰の結果、進化的に安定な元の均衡点に戻るのでしょうか。これを進化的に安定な均衡点の漸近的安定性と言う。

進化ゲームで、 k 種の戦略を採用する非常に多数の個体の集団を考える。つまり、 $S_i = \{1, 2, \dots, k\}$ で、各個体の効用関数は u である。各時刻 t で、純粋戦略 $i \in S$ を選択するように遺伝子に組み込まれた個体数が $p_i(t) \geq 0$ であったとする。ここで、 $p(t) = \sum_{i=1}^k p_i(t) > 0$ が全個体数である。 i 戦略を選択する個体数の全集団に占めるシェアを $x_i(t) = p_i(t)/p$ と表現する。戦略 i を採用する個体数の全集団に占めるシェアを $x_i(t) = p_i(t)/p(t)$ と表現すると、集団の構成状態は $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t))$ で表すことができる。集団からランダムに選ばれた個体は混合戦略 $x(t) \in \Sigma$ を選択していると思わせる。ランダムに選ばれた個体に対して、純粋戦略 i を選ぶ個体の期待利得は $u(e^i, x)$ で与えられる。ここで、 e^i は第 i 要素のみが 1 で、それ以外の要素はすべて 0 であるようなベクトルを表現する。つまり、 e^i は純粋戦略 i を表現する。相手が x 戦略をとり、自分も x 戦略をとるときの期待利得は

$$u(x, x) = \sum_{i=1}^k x_i u(e^i, x)$$

である。これは、この集団全体の平均的期待利得（適応度）の大きさを表している。期待利得（適応度）が各個体が生む子孫（子供）の数を表し、子供は親の戦略を受け継ぐとする。よって、戦略 i を受け継ぐ子供の出生率は $\beta + u(e^i, x(t))$ になると仮定できる。ここで、 $\beta > 0$ は採用する戦略とは無関係な種独自の出生率である。各個体の死滅率が一定値で、 $\delta > 0$ であるとする。このとき、人口構成のダイナミックスは

$$\dot{p}_i(t) = [\beta + u(e^i, x(t)) - \delta] p_i(t)$$

と与えられる。恒等式 $p_i(t) = x_i(t)p(t)$ の両辺の時間微分をとり、上の式を代入すると、

$$\dot{x}_i(t) = [u(e^i, x(t)) - u(x(t), x(t))] x_i(t) \quad (1)$$

が得られる。戦略 x_i の構成シェアの成長率はその戦略の適応度と集団平均の適応度との差に比例する。これが複製子動学 (replicator dynamics) の基本方程式である。集団の平均適応度よりも大きな適応度を持つ戦略の個体数は増加し、低い適応度を持つ戦略の個体数が縮小し続ける。効用関数 $u(x, x)$ は変数 x に関して線形

関数となっているので、複製子動学の基本方程式は

$$\dot{x}_i = u(e^i - x(t), x(t))x_i(t) \quad (2)$$

と表現することができる。現在の集団構成状態である混合戦略 x に対して、よりベストな純粋戦略で反応するサブ集団は最も高い人口増加率を達成する。複製子動学の方程式 (2) は、正の一次変換に関して不変である。つまり、関数 u を新しい関数 $\bar{u} = au + b$, $a > 0$ に置き換えても成立する。ここで、 a, b は実数定数である。

以下のような利得を持つ対称的ゲームを考えよう。 $a_1 a_2 \neq 0$ とする。

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$$

$a_1 a_2 < 0$ のとき、 $(0, 1)$ は ESS、ナッシュ均衡である。 $a_1 > 0, a_2 > 0$ のとき、 $\sigma_1 = (1, 0), \sigma_2 = (0, 1)$, は ESS であり、ナッシュ均衡であるが、 $\sigma_3 = (\lambda, 1 - \lambda)$ は ESS でないが、ナッシュ均衡になっている。 $a_1 < 0, a_2 < 0$ の場合、3種類の戦略 $\sigma_1 = (1, 0), \sigma_2 = (0, 1), \sigma_3 = (\lambda, 1 - \lambda)$ が ESS であり、ナッシュ均衡である。複製子動学の基本式 (2) は

$$\dot{x}_1 = [a_1 x_1 - a_2 x_2] x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = -\dot{x}_1$$

となる。進化的に安定な戦略が動学的に安定であるかどうかを考察する。 $a_1 a_2 < 0$ のケースを最初に取り上げる。 $a_1 < 0, a_2 > 0$ のとき、人口シェア x_1 は時間の経過とともに減少し続ける。 $x_1 = 0$ になる。ESS、ナッシュ均衡である $(0, 1)$ に収束する。 $a_1 > 0, a_2 < 0$ のとき、人口シェア x_1 は時間の経過とともに、増加し続け、1 に収束する。ESS (ナッシュ均衡) $(1, 0)$ は漸近安定である。人口構成比率は ESS に漸近的に収束する。囚人のジレンマゲームで、 $a_1 = -1, a_2 = 3$ とおくと、複製子動学の基本式は

$$\dot{x}_1 = (2x_1 - 3)(1 - x_1)x_1$$

である。協調ゲームで $a_1 = 2, a_2 = 1$ とおくと、複製子動学方程式は

$$\dot{x}_1 = (3x_1 - 1)(1 - x_1)x_1$$

となる。 $x_1 < 1/3$ の範囲では、 x_1 は減少し、ナッシュ均衡 $(0, 1)$ に収束する。 $x_1 > 1/3$ の領域では x_1 は増大するので、ナッシュ均衡 $(1, 0)$ に向かって収束する。従って、時間の経過と共に、ESS のうちの一つに安定的に収束する。 $a_1 < 0, a_2 < 0$ のケースを考える。上で説明した通り、 $(\lambda, 1 - \lambda)$ は進化的に安定な戦略で、 $\lambda = a_2 / (a_1 + a_2)$ である。 x_1 の成長率の符号は $x_1 < \lambda$ で常に正である。状態が $x_1 < \lambda$ にある限り、 x_1 は増加し続ける。他方で、 $x_1 > \lambda$ の範囲では、 x_1 の成長率は負となり、減少する。従って、時間の経過と共に x_1 は λ の値に向かって漸近的に収束する。言葉をかえれば、ESS は動学的にも安定になっている。ちなみに、タカ・ハトのゲームで、 $a_1 = -1, a_2 = -2$ とすると、複製子動学方程式

$$\dot{x}_1 = (2 - 3x_1)(1 - x_1)x_1$$

が得られる。

こうした議論から、以下の定理が成立する*7。

定理 2.1 (漸近安定性)

σ^* が進化的に安定な戦略であるならば、これらは複製子動学系において漸近的に安定である。

*7 この定理の証明等は Weibull(2002) を参照のこと。なお、進化ゲームに関する理論は、岡田 (2011)、Osborne(2004) などのゲーム理論のテキストでも展開されている。

2.4 社会進化の動学

社会的経済的な行動の進化のプロセス、つまり、行動の継承メカニズムは、生物界の進化プロセスに比較してはるかに複雑で、模倣、実験、学習、教育などより広範囲な継承過程を経る。個人の集団あるいは企業の集団における行動のダイナミックスを、

$$\dot{x}_i = x_i f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

と記述する。ここで、 x_i は戦略 i を採用する集団の全集団数に対する割合を示し、 \dot{x}_i/x_i は戦略 i を採用する集団の割合の成長率である。この成長率は $f(x)$ で与えられる。関数 f は $\sum_{i=1}^k x_i f_i(x) = 0$ を満たすと仮定する。この条件は微分方程式の解が常に $x_1 + x_2 + \dots + x_k = 1$ を満たすための条件である。社会的進化の動学では、すべての x に対して、もし $u(e_i, x) > u(e_j, x)$ であるならば $f_i(x) > f_j(x)$ であることが必要となる。なぜなら、期待利得の大きい方の戦略を選択する集団の成長率の方が高いと言う合理性が仮定される。例えば、顧客の満足度が高い商品ほどその販売額の成長率は高くなる。通常、 $f_i(x) = u(e_i, x) - u(x, x)$ とすればよい。このとき、社会進化の動学方程式は複製子動学 (2)

$$\dot{x}_i(t) = [u(e^i, x(t)) - u(x(t), x(t))]x_i(t)$$

と同一となる。

ここでは、最も簡単な技術選択の進化モデルを取り上げてみる。Mac OS や Android のように、タブレット商品に採用された OS 技術が 2 種類あり、消費者の期待利得はそのどちらの技術を採用した商品を購入するかで異なると同時に、どの程度の市場シェアを持つかにも依存する。単純化のために、2 種類の技術選択の利得が以下の表で与えられているとする。

		プレイヤー 2	
		技術 A	技術 B
プレイヤー 1	技術 A	(2, 2)	(0, 0)
	技術 B	(0, 0)	(3, 3)

技術 A の市場シェアを x_1 、技術 B の市場シェアを x_2 とすると、技術 A を選択するときの期待利得は $u(e_1, x) = 2x_1$ で、技術 B を選択するときの期待利得は $u(e_2, x) = 3x_2$ である。

$$u(x, x) = \sum_{i=1}^2 x_i u(e_i, x) = x_1 \cdot 2x_1 + x_2 \cdot 3x_2 = 2x_1^2 + 3x_2^2$$

が成立する。よって、技術選択の進化動学は

$$\dot{x}_1 = x_1(2x_1 - 2x_1^2 - 3x_2^2), \quad \dot{x}_2 = x_2(3x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2)$$

となる。この進化ゲームにおいて、 $\sigma_1 = (1, 0)$ 、 $\sigma_2 = (0, 1)$ は ESS であり、ナッシュ均衡であるが、 $\sigma_3 = (\lambda, 1 - \lambda)$; $\lambda = 2/5$ は ESS でないが、ナッシュ均衡になっている。 $x_1 < 2/5$ の範囲では、 x_1 は減少し、ナッシュ均衡 $(0, 1)$ に収束する。 $x_1 > 2/5$ の領域では x_1 は増大するので、ナッシュ均衡 $(1, 0)$ に向かって収束する。従って、時間の経過と共に、ESS のうちの一つに安定的に収束する。つまり、技術 A あるいは技術

B が標準技術となるが、どちらがデファクト技術になるかは、初期時の歴史に依存する。これは経路依存性と呼ばれる、ある種のネットワーク効果に他ならない。

今までの議論においては、ネットワーク構造が明示的に取り扱われていなかった。なぜなら、通常の進化ゲームにおいては、二匹の個体間の競争は全集団の中からランダムに取り出されて組み合わせられている、個体間競争がランダム・マッチングだからである。各個体がネットワーク的に関係している場合、個体間の進化ゲームは互いに連結された個体間で行われる。進化ゲームにネットワーク構造を導入する必要がある。こうした分析は十分に研究されていない。未開拓の分野となっている。

3 交渉と協力のゲーム

3.1 交渉ゲーム：公理的アプローチ

1万円の現金、一個のパイ・ケーキ、あるいは一個のアイスクリームを二人の間で配分する交渉問題は、二人交渉ゲームで取り上げられる典型例である。一個の分割可能財を二人で配分するとき、二人の間で配分の合意が成立しなければ、何ももらえないと想定される。現金やパイを分け合うケースでは、時間が多少かかっても、現金やパイは価値が減少しないが、アイスクリームを分け合うケースでは、時間が経過するとアイスクリームは溶けて小さくなる。ここでは最初に、時間の経過が効用に影響を与えない前者のケースに対応する交渉ゲームを考察する。

1万円を二人で分け合う交渉ゲームで、実行可能な配分 (x_1, x_2) は以下の条件を満たさなければならない。 x_1 は A 君の取り分で、 x_2 は B 君の取り分とする。

$$x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad .$$

この条件を満たす分配を、交渉の実現可能集合 (*feasible set*) という。もし二人の間で合意が成立たなければ、二人の取り分はゼロ円である。すなわち、交渉が決裂したとき実現する取り分は $(0, 0)$ で表現される。これを交渉の不一致点 (*disagreement point*) という。

二人交渉ゲームは、 R^2 の閉凸な部分集合 U と R^2 内の点 $d = (d_1, d_2)$ の組として定義できる。ここで、閉凸集合 U は上で説明した実行可能集合 (実行可能利得配分集合ともいう) に対応し、 (d_1, d_2) は不一致点 (不一致利得配分ともいう) を表現する点である。集合 $U \cap \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq d_1, x_2 \geq d_2\}$ は空でない有界集合となる。二人が取りうる戦略として混合戦略を認めれば、利得の配分集合 U が凸性を持つことは容易に理解できる。この場合、 U はそれ自身の閉包 (*closure*) を含むことになるので、コンパクトで凸集合となる。各配分から得られる両者の効用値を求め、交渉ゲームをこの効用値の集合として定式化することができる。効用値版の交渉ゲームは、各プレイヤーの実行可能な効用値配分集合 $F = \{(u_1, u_2)\}$ と不一致効用値 $v = (v_1, v_2)$ の組として定義される。

交渉の理論は、任意の二人交渉ゲーム (F, v) に対して、 F を実行可能な配分とし、 v を不一致配分とするとき、交渉の結果として得られる配分 $\phi(F, v)$ をどのように見いだすかを説明する。 $\phi(F, v)$ が交渉ゲームの解であり、 $\phi(F, v) = (\phi_1(F, v), \phi_2(F, v))$ となっている。交渉の結果、プレイヤー i が得られる配分は $\phi_i(F, v)$ である。

Nash は交渉問題への解を与えるにあたって、解 ϕ が満たすべき以下の公理系を提案した。

1. 公理 1 (パレート効率性) : $\phi(F, v)$ は F における配分であり、任意の $x \in F$ に対して、 $x \geq \phi(F, v)$ が成立するならば、 $x = \phi(F, v)$ である。

2. 公理 2 (個人合理性): $\phi(F, v) \geq v$ である。
3. 公理 3 (正の 1 次変換): もし G が F の正の 1 次変換、任意の実数 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \gamma_1, \gamma_2$ に対して、 $G = \{(\lambda_1 x_1 + \gamma_1, \lambda_2 x_2 + \gamma_2) \mid (x_1, x_2) \in F\}$ であるならば、 $\phi(G, w) = (\lambda_1 \phi_1(F, v) + \gamma_1, \lambda_2 \phi_2(F, v) + \gamma_2)$ である。ただし、 $w = (\lambda_1 v_1 + \gamma_1, \lambda_2 v_2 + \gamma_2)$ とする。
4. 公理 4 (独立性): 任意の閉凸集合 G に対して、 $G \subseteq F, \phi(F, v) \in G$ が成立するならば、 $\phi(G, v) = \phi(F, v)$ である。
5. 公理 5 (対称性): $v_1 = v_2, \{(x_2, x_1) \mid (x_1, x_2) \in F\} = F$ であるならば、 $\phi_1(F, v) = \phi_2(F, v)$ である。

上記 5 つの公理系のうち公理 3 を除けば、交渉ゲームの解がこれらの公理系を満たす必要性は直感的にも容易に理解できる。公理 3 は、元の効用関数に正の 1 次変換をして得られる効用関数を用いた新しい交渉ゲームの解は、元の交渉ゲームの解と同じものになることを意味する。この性質は通常の効用最大化問題において成立する特徴であるので、自然に受け入れることができ、不合理な公理ではない。Nash(1950) はこれらの公理を満たす解、ナッシュ交渉解がただ一つ存在することを証明した*8。

定理 3.1 (ナッシュ交渉解)

上記の公理 1 から公理 5 までを満たす解関数 $\phi(F, v)$ がただ一つ存在する。この $\phi(F, v)$ は最大化問題

$$\max_{x \in F, x \geq v} (x_1 - v_1)(x_2 - v_2)$$

の解である。

$(x_1 - v_1)(x_2 - v_2)$ は、各プレイヤーの交渉不一致点からの効用差の積になっている。これはナッシュ積と呼ばれている。ナッシュ交渉解はこのナッシュ積を最大にする配分である。だから、交渉ゲームの両者が対等な位置にいるならば、つまり、 $v_1 = v_2$ ならば、ナッシュ解における両者への配分は同一となる。

例 1: 例として、 $v_1 = v_2 = 0, F = \{(x_1, x_2) \mid \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} \leq 1, a > 0, b > 0\}$ であるような交渉ゲームを考える。この交渉問題の正の 1 次変換を、 $G = \{(\frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{b}) \mid (x_1, x_2) \in F\}$ とする。集合 $G = \{(y_1, y_2) \mid y_1 + y_2 \leq 1\}$ において、ナッシュ積 $y_1 y_2$ を最大にする点は $(1/2, 1/2)$ であるので、これがナッシュ交渉解となる。よって、交渉ゲーム (F, v) のナッシュ交渉解は $(a/2, b/2)$ となる。

例 2: プレイヤー 1 と 2 が 100 万円を配分し合う交渉ゲームを考える。プレイヤー 1 の効用関数を u_1 、プレイヤー 2 の効用関数を u_2 とする。 $v_1 = v_2 = 0, F = \{(u(x_1), u(x_2)) \mid x_1 + x_2 \leq 100\}$ である。効用関数 がリスク中立的であるときは、 $u_1(x) = u_2(x) = x$ とおけるので、ナッシュ積は $x_1 x_2 = x_1(100 - x_1)$ となる。よって、ナッシュ解は $(50, 50)$ となる。ところが、プレイヤー 1 がリスク回避的で、 $u_1(x) = 10\sqrt{x}$ と表現できるとき、ナッシュ積は $10\sqrt{x_1} x_2 = 10\sqrt{x_1}(100 - x_1)$ となる。この場合の交渉解は $(100/3, 100 - 3/100)$ である。プレイヤー 1 がリスク回避的になることにより、プレイヤー 2 の受取額が増加する。

例 3: 地主と小作人との間の交渉ゲームを取り上げる。小作人は地主から土地を借りて、農産物を生産する。収穫物のうち x の割合を小作人が取り、残りを地主に地代として払う。小作人は 1 単位の労働量を保有

*8 ナッシュ交渉解の存在証明は、ゲーム理論のテキスト、例えば、岡田 (2011) および Aumann(1989)、Osborne and Rubinstein(1994)、Myerson(1991)、などを参照してください。

しており、そのうち l を農産物の生産のための労働に配分すると、収穫量は $f(l)$ となる。小作人の効用水準は $u(l) = xf(l) + (1-l)w$ で与えられるとする。ここで、 w は労働の機会費用である。地主の受け取る地代は $(1-x)f(l)$ である。この小作人と地主との間の地代を巡る交渉ゲームでは、 $v_1 = 1, v_2 = 0$ なので、ナッシュ積は $(xf(l) - wl)(1-x)f(l)$ で与えられる。小作人の最適な労働供給量は自らの効用を最大化するように決まるので、 $xf'(l) = w$ を満たしている。簡単化のために、 $f(l) = 2\sqrt{l}$ とおくと、 $l(x) = (x/w)^2, f(l) = 2x/w$ となる。ナッシュ交渉解は積

$$\frac{1}{w^2}x^3(1-x)$$

を最大にする x^* であるので、 $x^* = 3/4$ となる。つまり、小作人と地主の間で収穫量は 3 対 1 で配分される。

例 4：経営者と労働者間の賃金交渉を考えてみる。労働組合は L 人の労働者を代表して、企業に雇用されないときには w_0 の留保賃金を提供できるとする。企業が l 人の労働者を雇用するとき、 $f(l)$ 単位の生産物が生産できる。この生産関数は収穫逡減の通常の仮定を満たすとする。賃金率 w で雇用者数 l が確保できるときの労働組合の利得 u_1 と経営者の利得 u_2 は

$$u_1 = wl + (L-l)w_0, u_2 = pf(l) - wl$$

となっている。ここで、 p は生産物の価格である。交渉の不一致点は $v_1 = w_0L, v_2 = 0$ である。賃金率 w のもとで企業が雇用する労働者数は $pf'(l)^* = w$ を満たさなければならない。ナッシュ交渉解における賃金率はナッシュ積

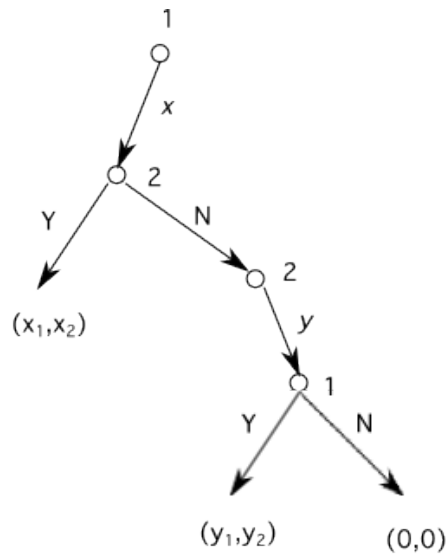
$$((w - w_0)l^*)(pf(l^*) - wl^*)$$

を最大にする w^* である。これを解くと、 $w^* = (pf'(l^*)/l^* + w_0)/2$ が得られる。

3.2 交渉ゲーム：戦略的アプローチ

次に、アイスクリームの交渉問題のように、交渉時間が重要となるような性質の交渉ゲームを取り上げる。各プレイヤーの時間選好を明示的に導入した交渉過程を考察する。以下のような、交互オファーの 2 段階交渉ゲームを考える。二人の主体が交互にオファーする交渉ゲームは一個のパイの分配を巡って、以下のルールに従って行われる。主体 1 の提案を $x = (x_1, x_2)$ 、主体 2 の提案を $y = (y_1, y_2)$ と表記する。

1. 最初のオファーで、主体 1 が、1 個のパイのどの割合を主体 2 に分け与え、自身がどれほどの割合を受け取るかの提案 $x = (x_1, x_2)$ を、主体 2 にオファーする。
2. 主体 2 は 1 によって提案された配分案を受け入れるか、反対提案 (counterproposal) をすることができる。
3. 主体 1 が主体 2 の反対提案 $y = (y_1, y_2)$ を受諾すれば、2 の提案とおりにパイを分け合うことができる。しかし、拒否したとき、両者は何も得られない。



A two-period bargaining game of alternating offers

Fig. 交互オファーの交渉ゲーム

2回目の（主体2の）提案が受諾されるとき、各主体 $i (i = 1, 2)$ が受け取るパイ1個の価値は、1回目のオファーの時点でパイを受け取るとき価値の δ_i 倍となると仮定する。ただし、 $(0 < \delta_i < 1)$ である。時間の経過に伴い、価値が減価する。 δ_i は割引因子と理解される。第一回目のオファーを主体2が受託するときに得られる価値は (x_1, x_2) である。2回目の主体2のオファー $y = (y_1, y_2)$ を受け入れるときのパイの価値は、主体1にとっては $\delta_1 y_1$ 、主体2にとって $\delta_2 y_2$ となる。これは2段階ゲームなので、サブゲーム完全均衡がゲームの解となる^{*9}。主体2のオファーから始まるゲームにおいて、主体2は配分案 $y = (0, 1)$ をオファーするであろう。何故なら、主体1にとって、この提案を受け入れることと拒否することは無差別になっている。この主体2の配分案 $(0, 1)$ が受け入れられるとき、両者が受け取る価値は $(0, \delta_2)$ となる。主体1の最初のオファーから始まるゲームでは、主体2がこのオファーを拒否したときの主体2の受け取れる価値が δ_2 となることが分かっている。言い換えると、主体2は、 $x_2 \geq \delta_2$ なる条件を満たす提案ならば受諾するが、 $x_2 < \delta_2$ となるような提案を拒否する。この結果、主体1が提案する最適なオファーは $(1 - \delta_2, \delta_2)$ となる。これがサブゲーム完全均衡となる。

交互オファーの回数が2回から3回に増加するとき、サブゲーム完全均衡はどのような特徴を持つでしょうか。3回の交互オファーのゲームでは、主体2のオファーが、2回交互オファーのケースでの主体1と同じ立場になっている。従って、主体2の最適なオファーは $(\delta_1, 1 - \delta_1)$ となる。これを主体1が受諾すれば、両者が受け取る価値は $(\delta_1^2, \delta_2(1 - \delta_1))$ となる。従って、主体1は最初のオファーで $(\delta_1^2, \delta_2(1 - \delta_1))$ を提案することになる。これが3回交互オファーゲームにおけるサブゲーム完全均衡である。

最後に、各主体に何回目のオファーであろうとも拒否して、反対提案をする権利を与える場合、すなわち、交互オファーの回数が無限回になることを認めるゲームを考えてみよう。 t 回目のオファーでゲームが終了したときの各主体の行動の連鎖を $(x^1, N, x^2, N, x^3, N, x^4, \dots, x^t, Y)$ と表記する。ここで、

*9 サブゲーム完全均衡とは、任意の段階から始まるサブゲームにおいて、各主体の戦略の組がナッシュ均衡になっているような状態を指す。

$x^t = (x_1^t, x_2^t)$ は t 回目の提案を表現し、 N は提案の拒否を、 Y は提案の受諾を意味する。すべてのオファーが拒否され続けるような行動の連鎖は $(x^1, N, x^2, N, x^3, N, x^4, N, \dots)$ という形式を取る。終結するゲーム $(x^1, N, x^2, N, x^3, N, x^4, \dots, x^t, Y)$ から得られる主体 i の利得は $\delta_i^{t-1} x_i^t$ であり、永遠に続くゲームからの利得は 0 である。無限回交互オファーのゲームでは、どのオファーから始まるサブゲームも同一の構造をしている。主体 1 にとっても、主体 1 のオファーから始まるサブゲームはすべて同一であり、主体 2 にとっても主体 2 のオファーから始まるサブゲームはまったく同じ構造をしている。この意味で、ゲームの動的な構造は定常的である。また、オファーの回数が無限回あるので、後方推論法が採用できない。基本的に無限繰り返しゲームと同じ性質を持っている。各主体の最適戦略は定常的な性質を持つものである。直感的には、各主体は自己への配分割合がある閾値を越えるときにはオファーを受け入れ、この閾値未満の場合にはオファーを拒否するという形式を持つ戦略を採用すると推測できる。すなわち、以下の様式を持つ戦略を採用する。

1. 主体 1 は常に x^* を提案し、提案された配分 $y = (y_1, y_2)$ が条件 $y_1 \geq y_1^*$ を満たすときにのみオファーを受諾する。
2. 主体 2 は常に z^* を提案し、提案された配分 $w = (w_1, w_2)$ が条件 $w_2 \geq w_2^*$ を満たすときにのみオファーを受諾する。

このような形式を持つサブゲーム完全均衡を求めよう。有限回数の交互オファーゲームでは、条件

$$x_2^* \geq w_2^*, \quad z_1^* \geq y_1^*$$

が満たされる。これらの条件で、厳密な意味での不等式が成立つとき、互いに自己の利得を増大しようとする調整が働くので、均衡では、等式が成立しなければならない。よって、 $x_2^* = w_2^*$, $z_1^* = y_1^*$ となる。従って、サブゲーム完全均衡な戦略の組は

1. 主体 1 は常に x^* を提案し、提案された配分 $y = (y_1, y_2)$ が条件 $y_1 \geq y_1^*$ を満たすときにのみオファーを受諾する。
2. 主体 2 は常に y^* を提案し、提案された配分 $x = (x_1, x_2)$ が条件 $x_2 \geq x_2^*$ を満たすときにのみオファーを受諾する。

主体 2 が主体 1 のオファーを拒否するときには、主体 1 が主体 2 の反対提案を受け入れて、主体 2 は y_2^* を 1 期後に得られる。従って、主体 2 が主体 1 の提案を受け入れる条件は

$$x_2^* = \delta_2 y_2^*$$

となる。同様に、

$$y_1^* = \delta_1 x_1^*$$

が成立する必要がある。条件 $x_2^* = 1 - x_1^*$, $y_2^* = 1 - y_1^*$ を上の式に代入して、

$$\begin{aligned} (x_1^*, x_2^*) &= \left(\frac{1 - \delta_2}{1 - \delta_1 \delta_2}, \frac{\delta_2 (1 - \delta_1)}{1 - \delta_1 \delta_2} \right) \\ (y_1^*, y_2^*) &= \left(\frac{\delta_1 (1 - \delta_2)}{1 - \delta_1 \delta_2}, \frac{1 - \delta_1}{1 - \delta_1 \delta_2} \right) \end{aligned}$$

が得られる。これが、交互オファーの交渉ゲーム (a bargaining game of alternating offers) のサブゲーム完全均衡となる^{*10}。サブゲーム完全均衡では、最初の主体 1 によるオファー x^* が主体 2 に受諾され、ゲームが終結する。

交互オファーの交渉ゲームでは、主体 1 は奇数回目のオファーを提示し、主体 2 は偶数回目のオファーを提案する。上のモデルでは、オファーを早期に受け入れる経済動機を時間選好に基づいて説明した。相手のオファーを早い時期に受け入れる別の動機も存在する。各オファーの段階で提案が拒否されるとき、交渉が打ち切られる可能性も存在する。この交渉打ち切りの可能性をモデルに明示的に導入しよう。主体 1 が提案したオファーを主体 2 が拒否するときに主体 1 が交渉を打ち切る確率を $p_1 (0 < p_1 < 1)$ 、そのときこの交渉ゲーム外で得られる主体 2 の留保利得の大きさが v_2 であるとする。主体 2 が提案したオファーを主体 1 が拒否するときに主体 2 が交渉を打ち切る確率を $p_2 (0 < p_2 < 1)$ とし、主体 1 の留保利得を v_2 とする。こうした想定のもとでの交互オファーゲームの解は以下の定理によって与えられることが知られている^{*11}。

定理 3.2 (交互オファーの交渉ゲーム)

無限回の交互オファーを認める二人交渉ゲーム (F, v) は、以下のようなサブゲーム完全均衡がただ一つ存在する。すなわち、サブゲーム完全均衡では、主体 1 は配分 \bar{x} を常に提案し、 \bar{y}_1 以上の配分が得られる提案がオファーされるときは受諾する。主体 2 は配分 \bar{y} を提案し、 \bar{x}_2 以上の配分が得られる提案がオファーされるときは受諾する。ただし、配分 \bar{x} と \bar{y} は

$$\begin{aligned}\bar{y}_1 &= (1 - p_2)(\bar{x}_1 - v_1) + v_1 \\ \bar{x}_2 &= (1 - p_1)(\bar{y}_2 - v_2) + v_2\end{aligned}$$

を満たす。さらに、均衡では、交渉ゲームは第一回目のオファー \bar{x} が受け入れられて、合意に達する。

この定理にある確率 p_i は主体 i の交渉へのコミットメントの度合いを示すもので、オファーした提案がどの程度最終的なオファーになっているかを表現する。交渉ゲームでの取り分は、この交渉へのコミットメント度合いの相対的な大きさに p_1/p_2 に大きく影響される。例えば、

$$1 - p_1 = (1 - \epsilon)^\alpha, \quad 1 - p_2 = (1 - \epsilon)^\beta$$

とおくと、定理の条件式から、

$$(\bar{x}_1 - v_1)^\alpha (\bar{x}_2 - v_2)^\beta = (\bar{y}_1 - v_1)^\alpha (\bar{y}_2 - v_2)^\beta$$

が成立する。この配分は交渉ゲーム (F, v) の効率的フロンティアと一般化ナッシュ積 $(\bar{x}_1 - v_1)^\alpha (\bar{x}_2 - v_2)^\beta$ が交差した 2 点になっている。 α と β が同じ値に収束するに連れて、この 2 点はナッシュ交渉解に近づいて行き、最終的には一致する。各主体の交渉へのコミットメントの度合いが同じ程度であるならば、サブゲーム完全均衡はナッシュ交渉解に一致する。

3.3 提携ゲームとコア

n 人交渉ゲームを考えると、二人ゲームには見られない現象、つまり、数名のプレイヤーが協力して、自分たちの利得が最大になるような行動をする可能性が大きくなる。プレイヤーたちが形成するグループを提携

^{*10} これがサブゲーム完全均衡になることの厳密な証明については、Osborne and Rubinstein(1994) の第 7 章および岡田 (2011) の第 8 章を参照のこと。

^{*11} この証明については、Myerson(1991) の第 8 章を参照のこと。

(coalition) と呼ぶ。全プレイヤーが協力して一つのグループになることを全提携 (grand coalition) という。提携ゲームを理解するためには、各プレイヤーが形成する提携とその提携において選択されている戦略の優劣関係を分析する必要がある。プレイヤー集合 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ の部分集合でもある提携を S と表記する。全プレイヤーから形成される提携を $S(N)$ と表現する。任意の提携 S に対応する提携値 v が存在して、この提携値は特性関数 (characteristic function) $v(S)$ と表現できるとする。提携ゲーム (N, v) において、プレイヤー i の利得を x_i とし、利得ベクトルを $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ と表記する。提携内で各プレイヤーの利得が移転可能なときを、移転可能な効用を持つ提携ゲームと言う。以下、しばらくの間、移転可能な効用を持つ提携ゲームを取り上げる。

提携 S に対して、条件

$$\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$$

が成立するとき、利得の配分 x は提携 S で実行可能であると言う。全提携 $S(N)$ に対して実行可能であるとき、ただ単に実行可能であると言う。もし配分 x に対して、 $v(S) > \sum_{i \in S} x_i$ が成立するならば、提携 S は配分 x を支配 (dominate) すると言う。

定義 3.1 (コアの定義)

配分 x が移転可能な利得を持つ提携ゲームのコア (the core) であることの必要十分条件は、配分 x が実行可能であり、かつ、配分 x を支配するいかなる提携も存在しないことである。すなわち、任意の提携 S に対して

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N), \quad \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$$

が成立することである。

コアに属する配分が提携合理性つまり、 $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$ を満たすことから、配分の成分が有限個の線形不等式を満たしているので、コアはその線形不等式で作られる凸多面体となる。すなわち、コアは有界で閉じた凸集合である。

任意の提携 $S \subset N - \{i, j\}$ について、 $v(S \cup i) = v(S \cup j)$ が成立するとき、プレイヤー i と j は対称であるという。任意の二人のプレイヤーが対称であるようなゲームを対称ゲームと言う。対称ゲームに関して、以下の定理が成立つ。

定理 3.3 (コアの存在)

対称ゲームにおいて、コアが存在するための必要十分条件は、任意の提携 S に対して、

$$\frac{v(S)}{|S|} \leq \frac{v(N)}{|N|}$$

が成立つことである。ここで、 $|S|$ および $|N|$ は当該集合の要素数を意味する。

例 1: A と B の二人が共同で協力して生産物を 1 単位生産して、それを配分し合うゲームを考える。一人だけでは生産できないとする。各プレイヤーは自分の取り分だけが利得となり、取り分量が多ければ多いほど効用が高くなる。このとき、

$$N = \{1, 2\}, \quad v(\{1\}) = v(\{2\}) = 0, \quad v(\{1, 2\}) = 1$$

と提携ゲームで定式化できる。実行可能な配分は

$$\{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

となる。この実行可能な配分がコアとなっている。何故なら、協力をしなければ、取り分はゼロであり、また、自分の取り分を増加すれば、他方の取り分が減少するから、そうした配分は元の配分を優越しない。

例 2: 地主が k 人の農民を雇用して農産物を生産すると、 $f(k+1)$ の食料が生産できる。ここで、 $f(k+1)$ は増加関数である。農民の数が m 人いるとする。地主も農民も自分の取り分だけが効用に関係し、食料の取り分が多ければ多いほど効用が高い。提携ゲームでの表現で、 $N = \{1, 2, \dots, m+1\}$ とし、プレイヤー 1 を地主とする。このとき、地主が S のメンバーでないとき、 $v(S) = 0$ 、 S が地主と k 人の農民からなるとき、 $v(S) = f(k+1)$ である。簡単化のために、 $m = 2$ としよう。このとき、以下の条件

$$\begin{aligned} x_1 &\geq f(1), \\ x_1 + x_2 &\geq f(2), \\ x_1 + x_3 &\geq f(2), \\ x_1 + x_2 + x_3 &= f(3) \end{aligned}$$

が成立するとき、この配分 x はこのゲームのコアとなる。等式 $x_1 = f(3) - x_2 - x_3$ を上の不等式代入すると、

$$\begin{aligned} x_2 &\leq f(3) - f(2), \\ x_3 &\leq f(3) - f(2), \\ x_2 + x_3 &\leq f(3) - f(1) \end{aligned}$$

が得られる。ゲームのコアにおける配分では、農民の取り分は二人目の農民が生み出す限界生産物と等しいかまたはそれ以下となっている。二人の農民の受け取り総計は、最大で、二人の農民が生み出す食料生産の増加分になっている。この結論は、経済学的演繹から予想される結論と矛盾しない。

例 3: 一人の売手と二人の買手からなる市場を考える。一人の売手はある非分割財（例えば、競争馬）1 単位を売りたいと思っている。二人の買手は十分な資金持っていて、この馬を買おうとしている。売手の馬の留保価値は 0 で、二人の買手の馬に対する評価額は貨幣単位で 1 単位（例えば、1 億円万円）だとする。このゲームの特性関数は

$$\begin{aligned} v(\{1, 2, 3\}) &= v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = 1, \\ v(\{1\}) &= v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2, 3\}) = 0 \end{aligned}$$

となる。コアにおける配分は $(1, 0, 0)$ となる。つまり、売手は価格 1 で財を売り、どちらかの買手が財を購入する。

例 4: 多数決ゲームを考える。3 人のプレイヤーが 1 単位の金額（例えば、100 万円）を 3 人の多数決によって分ける。多数を占めた提携、この場合は 2 名の提携が資金の全部を獲得する。このゲームは次のように表される。

$$\begin{aligned} v_1 = v_2 &= 0, v(\{1, 2, 3\}) = 1, \\ v(\{1\}) &= v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0, \\ v(\{1, 2\}) &= v(\{2, 3\}) = v(\{1, 3\}) = 1 \end{aligned}$$

このゲームは上のコアの存在条件を満たさないので、コアは存在しない。しかし、現実では、このようなゲームでも、何らかの決着がつく。例えば、提携 $S = \{1, 2\}$ が成立すれば、この提携は多数派なので、全金額を二人で分け合うことができ、例えば、等分に分けることができる。従って、以下のような配分のうちのいずれかが起こると予想される。

$$K = \{(0.5, 0.5, 0), (0, 0.5, 0.5), (0.5, 0, 0.5)\}.$$

提携ゲームで個人合理性、 $x_i \geq v(\{i\})$ が満たされなければ、ゲームには参加しない。この個人合理性を満たす配分は配当 (imputation) と呼ばれている。配当の条件を満たさないような配分を考える意味はないので、以後、配分は配当の条件を満たす配分を考えるので、配分ということばを使用する。配分 x と提携 S について、すべての $i \in S$ に対して $x_i > y_i$ が成立つならば、配分 x は配分 y に対する提携 S の異議であると言う。これを、 $x \succ_S y$ と表記する。または、提携 S を介して、配分 x は配分 y を支配するともいう。

定義 3.2 (安定集合)

移転可能な利得を持つ提携ゲームにおける配分の集合 X の部分集合 Y は以下の 2 条件を満たすとき安定集合 (a stable set) であるという。

1. (内部安定性) もし $y \in Y$ であるならば、いかなる $z \in Y$ に対しても $z \succ_S y$ を満たす提携 S は存在しない。
2. (外部安定性) もし $z \in X - Y$ ならば、ある提携 S に対して $y \succ_S z$ となるような配分 $y \in Y$ が存在する。

配分 x に支配される配分の集合を $D(x)$ と表記する。内部安定性は x と y が安定集合 Y に属する配当ならば、 x は y を支配せず、 y も x を支配しないことを意味するので、この表記に従えば、 $Y \cap D(Y) = \emptyset$ でなければならない。外部安定性は、 $Y \cup D(Y) = X$ と書くことができる。したがって、安定集合 Y は $Y = X - D(Y)$ を満たす集合である。このように定義される安定集合は一般にただ一つとは限らない。複数の安定集合が存在する提携ゲームがある。

安定集合に関する以下の定理が知られている。

定理 3.4 (安定集合とコア)

- a. コアはすべての安定集合の部分集合である。
- b. コアが安定集合であるならば、それがただ一つの安定集合となる。

この定理は、提携ゲームにコアが存在すれば必ず安定集合が存在するが、反対に、安定集合が存在してもコアが存在するとは限らない。上の例 4 で取り上げた多数決ゲームでは、安定集合は集合 K に他ならないが、コアは存在しない。

参考文献

- [1] 岡田 章 (2011)、『ゲーム理論』(新版)、有斐閣。
- [2] Robert J. Aumann(1989), *Lectures on Game Theory*, Westview Press.
- [3] Gabrielle Demange, David Gale and Marilda Sotomayor(1986), *Multi-item auctions*, *Journal of Political Economy*, 94(4), 863-872.
- [4] David Easley and Jon Kleinberg(2010), *Networks, Crowds and Markets: Reasoning about a High Connected Worlds*, Cambridge University Press.

- [5] Drew Fudenberg and Jean Tirole(1991), *Game Theory*, MIT Press.
- [6] David Gale and Lloyd Shapley(1962), college admissions and the stability of marriage, *American Mathematical Monthly*, 69, 9-15.
- [7] David Gale(1960), *The Theory of Linear Economic Models*, McGraw Hill.
- [8] Roger B. Myerson(1991), *Game Theory: Analysis of conflict*, Harvard University Press.
- [9] Martin J. Osborne and Ariel Rubinstein(1994), *A Course in Game Theory*, MIT Press.
- [10] Martin J. Osborne(2004), *An Introduction to Game Theory*, Oxford University Press.
- [11] Alvin E. Roth and Marilda A. Oliveira Sotomayor(1990), *Two-Sided Matching: A study in Game-theoretic modeling and analysis*, Cambridge University Press.
- [12] Ariel Rubinstein(1982), Perfect equilibrium in a bargaining model, *Econometrica*, 50(2), 97-109.
- [13] Ariel Rubinstein and Asher Wolinsky(1985), Equilibrium in a market with sequential bargaining, *Econometrica*, 53(5), 1133-1150.
- [14] Lloyd Shapley and Martin Shubik(1971), The assignment game, *International Journal of Game Theory*, 1, 111-130.
- [15] Martin Shubik(1984), *A Game-Theoretic Approach to Political Economy*, MIT Press.
- [16] John Maynard Smith(1974), The Theory of Games and the Evolution of Animal Conflicts, *Journal of Theoretical Biology*, 47, 209-21.
- [17] John Maynard Smith(1982), *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge University Press (日本語訳『進化とゲーム理論』産業図書) .
- [18] Richard H. Thaler(1988), Anomalies: The Ultimatum Game, *Journal of Economic Perspective*, 2, 195-206.
- [19] Jorgen W. Weibull(2002), *Evolutionary Game Theory*, MIT Press.