

# 社会的ネットワークにおけるイノベーションの拡散過程

増山 幸一

明治学院大学経済学部

2014年3月: in progress version

## 1 序

経済学における重要な課題の一つは、新しい考え方や行動規範、そして新技術やイノベーションが社会的ネットワークを介してどのように伝搬して、社会に定着するのかを解明することである。Bikhchandani, Hirshleifer and Welch(1992) および Banerjee(1992) は、流行やファッション、習慣あるいはカルチャーの変化を情報カスケード現象として定式化した。社会的なネットワークの中に生活する人々は、自分自身の持つ情報よりも、友人や隣人達の行為を観察することに信頼を置いて意思決定を行うので、隣人達の追従・模倣行動、あるいは、ある種の群集化現象を引き起こす。こうした情報カスケード現象や模倣の拡散過程は、極めて異なる要因によって引き起こされているとしても、感染学で研究されてきたインフルエンザ・ウイルスやエイズ・ウイルス (HIV) の感染過程、コンピュータ・ウイルスのインターネット上での感染過程、(1996年8月にカリフォルニア地方で起こった) 送電網の機能停止の連鎖現象と類似している。さらには、マーケティング研究で有名なハッシュポピー靴の突然の大流行現象、銀行間ネットワークにおけるデフォルト連鎖の波及過程および金融資産市場における株価の暴落現象なども通底する共通のメカニズムが働いている。また、周知の通り、国際金融システムにおけるシステムック・リスク問題やデフォルトの連鎖過程を理解するためには、ネットワーク理論を応用することが最も有効なアプローチになり得るという指摘は従来からなされてきた\*1。

Young(2009) は、情報カスケード現象やイノベーション拡散過程を分析するために採用されてきたアプローチを、大別して、以下の3種類のモデルに分類している。感染モデル (contagion model)、社会的影響モデル (social influence model)、そして社会的学習モデル (social learning model) の3種類である。感染モデルは伝染病感染の研究で古くから使用されてきたモデルで、SIS(susceptible-infected-susceptible) モデルあるいは SIR(susceptible-infected-recovered) モデルと呼ばれるものに代表される。ウイルスなどが、社会的ネットワークにおける人的接触を介して、ネットワーク内の巨大クラスターに伝搬するカスケード現象として理解される。Pastor-Satorras and Vespignani(2001) は、スケールフリー・ネットワーク上の SIS モデルを用いて、インターネットにおけるコンピュータ・ウイルスの感染過程を説明している。

社会的影響モデルでは、隣人からの影響力が一定の閾値を超えたときに、感染あるいは模倣が生じると想定する。模倣の閾値モデルは、1970年代に、Granovetter(1978) および Schelling(1978) によって社会的ネット

---

\*1 こうした要請に応じて、Arinaminpathy, Kapadia and May(2012)、Gai and Kapadia(2010)、Gai, Haldane and Kapadia(2011)、Haldane and May(2011)、May and Arinaminpathy(2010)、Nier, E., et al.(2007) などに代表される研究は国際金融システムの不安定現象 (デフォルトの連鎖過程) をネットワークモデルを用いて考察している。

ワークの分析に導入された。Watts(2002)は、閾値モデルの枠内で、ランダム・ネットワークにおける新技術の伝搬過程を分析するモデルを提案している。Dodds and Watts(2004,2005)は社会学で活用されている簡単な閾値モデルを感染閾値モデルに発展させ、シミュレーションによる結果を用いて、病原菌感染の動的な過程を説明している。

経済分析において最も有効なアプローチは社会的学習モデルを活用することである。イノベーションの拡散現象を分析するアプローチは、拡散過程を社会的ネットワークにおける協調ゲームとして定式化し、進化論的ゲームの枠組みを用いて分析を進めることである。こうしたアプローチにおける初期の研究は、Blume(1993, 1995)、Ellison(1993)、および、Kandori, Mailath and Rob(1993)などに代表される。Young(1993, 1998)は、社会的制度や取引慣習などが社会的ネットワーク上に登場し、広く拡散して社会的な規範として定着する動的な過程を進化的協調ゲームにおける学習過程として定式化している。これらの研究は、基本的に、イノベーション拡散過程を $2 \times 2$ 協調ゲームのリスク支配均衡 (risk dominant equilibrium) へ向かう確率的進化過程 (摂動マルコフ過程) として定式化し、リスク支配均衡に収束する平均時間が有限となることを証明している。このうち、Ellison(1993)、Kandori, Mailath and Rob(1993)、および Young(1993)は、摂動マルコフ過程に一様誤差モデル (uniform error model) と呼ばれる定式化を採用し、Blume(1993)や Young(1998)は摂動マルコフ過程を定式化する際に主体の最適反応様式として対数線形反応 (log-linear response) を適用している\*2。

イノベーションの簡単な閾値モデルでは、ネットワーク上のノード  $i$  が  $d_i$  人のノードと連結されており、そのうち  $k_i$  人の隣人が新技術を採用し始めたとき、採用比率  $k_i/d_i$  がある閾値  $q$  を越えるならば、ノード  $i$  も新技術を採用すると想定される。Morris(2000)は、イノベーション拡散過程が $2 \times 2$ 協調ゲームのペイオフを生み出すと想定することで、この閾値 (模倣の閾値あるいは追従の閾値という) を2人協調ゲームのペイオフの大きさから計算することを提案した。さらに、ネットワーク全体にイノベーションが拡散するための条件がこの模倣の閾値とネットワークの密着度との関係に密接に依存することを示した。また、格子状にノードが配置されているようなネットワークでは、イノベーション拡散のために必要な閾値はたかだか  $1/2$  であることも明らかにした。

López-Pintado(2006,2008)は、ネットワーク上で次数  $k$  を持つ各ノードの中でイノベーションを適用したノード数の割合  $\rho_k(t)$  を主要な確率変数として、統計力学の領域で発展してきた平均場理論 (mean field theory) に基づいて、この確率変数  $\rho_k(t)$  の平均値の動的方程式を活用することを提案した\*3。平均値の動学方程式の定常状態の関係式から、感染の閾値を計算することを示した。この計算手法によれば、感染の閾値の大小はネットワーク上の次数分布の分散に大きく関係することが分かる。例えば、正規性ネットワーク、指数型ネットワーク、そして、スケールフリー・ネットワーク、の順に、感染の閾値は小さくなるのが数値計算の結果から分かる。言い換えると、この順番で、イノベーションはより容易に拡散する。また、閾値モデルをより一般化して、隣人の行動を模倣あるいは追従する可能性を表現する関数として模倣の閾値関数という関数形式を導入するならば、模倣の閾値関数の数学的性質もイノベーション拡散のために必要な感染の閾値の決定に大きく影響する。López-Pintado(2008)によれば、例えば、模倣の閾値関数が新技術を採用した隣人数だけに依存する場合 (SIS モデル)、次数分布の分散の大きさに逆比例して伝染の閾値は小さくなる。スケール

\*2 対数線形最適反応を明示的に用いたモデルは、Montanari and Saberi(2010)や Young(2002, 2011)の研究でも採用されている。

\*3 上記の Dodds and Watts(2004,2005)の研究でも、平均場理論が活用されている。確率過程のマスター方程式から平均値の動学方程式を導出する方法、言い換えると、平均場理論における動的方程式を簡単に導出する計算方法は増山 (2007)に簡潔に説明されている。

フリー・ネットワークの伝染の閾値はゼロである。模倣の閾値関数が隣人の採用者数と隣人数の多変数関数となっている場合、伝染の閾値の大小は次数分布の大小と単調な関係を持たないことも指摘できる。ただし、平均場の理論による平均値の動学方程式の導出では、新技術を採用した主体が時間の経過と共に古い技術に回帰する確率が正であることを暗黙に仮定している。この仮定が成立しない場合、結論は一般化できない。また、模倣するか否かの意思決定をする各時刻で、毎回、各ノードの隣人は所与の確率分布に従って全人口からランダムに選択されると仮定されている。

初期に新技術を採用したノードの集合のネットワーク全体に占める占有率がある臨界点を越えるとき、イノベーションがネットワークの非常に多数の主体に一気に拡散するという、イノベーション拡散過程の転換点 (tipping point) を定式化するために、Jackson and Yariv(2005, 2007) は、行為に関わる費用と協調ゲームから得られるペイオフに関する非均質性を確率分布として表現し、彼らの確率的最適反応を明示的に導入した一般化 SIR モデルを提案した。2人協調ゲームにおいて新技術の適用から得られる相対的ペイオフを  $v_i$ 、それに伴う費用を  $c_i$  とするとき、これらは確率変数で、一様確率分布していると仮定される。隣人のうち新技術を採用している主体が  $k_i$  であるとき、新技術の適用から得られる純利得が  $v_i, c_i, d_i, k_i$  に依存すると想定される。初期に、新技術を採用したノード数の全ノードに対する比率を  $x^0$  とするとき、各ノードにリンクされている隣人集合は比率  $x^0$  で新技術をもつノードを含んでいると想定される。一般的に、イノベーションがネットワーク全体の多数に拡散する為に必要な初期比率  $x^0$  の転換点は、 $v_i, c_i$  とネットワークの次数分布に依存することは自明である。Jackson and Yariv の研究は、こうした依存関係を解析的に分析し、ネットワークの構造の変化がこの臨界点をどのように変化させるかを明らかにした。ペイオフ  $v_i$  が  $i$  の次数の増加 (減少) 関数である場合には、転換点は低下 (上昇) し、イノベーションはより広範囲 (狭い範囲) に拡散する。次数分布の分散が増加するとき、転換点が小さくなり、イノベーションがより広範囲に拡散するかどうかは、次数の関数としてのペイオフの数学的形状に依存する。ペイオフが次数の増加凸関数であるならば、次数分布の分散の増加はイノベーションの拡散をより拡大させることが示されている。López-Pindo(2006,2008) と同じく、平均場理論を活用する前提的仮定として、毎回の意思決定のアップデート時点で、各ノードの隣人は所与の確率分布に従って全人口からランダムに選択され、その隣人の中で新技術を採用しているノード数が同一比率になっていると仮定されている。初期時点でも、すべてのノードはリンクされている隣人集合の中に同一の比率  $x^0$  で新技術採用者数が含まれていると仮定されている。この仮定は現実のイノベーション拡散過程で観察される現象の特性とは整合しない。

本稿は、Jackson and Yariv(2005, 2007) の研究で用いられたモデルの一般化を行い、イノベーション拡散のための閾値あるいは転換点 (tipping point) およびイノベーションの浸透度が社会的ネットワークの連結度構造や隣人効果の特質といかなる関係にあるのかを明らかにすることである。

次節では、ゲーム理論から発展してきた  $2 \times 2$  協調ゲームの進化論的アプローチに基づく Morris(2000) モデルを取り上げ、模倣の閾値の意味、および、ネットワークの連結構造と伝染の閾値との関係を説明する。第3節で、閾値モデルの枠組み内で、ランダムネットワークにおけるイノベーション拡散の問題を取り上げ、分析方法とイノベーション拡散の特徴を説明する。第4節で、López-Pintado(2006,2008) および Jackson and Yariv(2005,2007) のモデルを一般化することを提案する。とりわけ、ネットワークの連結度の分散の大小とイノベーションの浸透度の増減との関係性はクリアカットな関係として成立たないことの要因を説明する。さらに、ネットワークの連結度の分散の増加がイノベーションの転換点 (tipping point) を低下させ、浸透度を増大させるか否かは、ネットワーク上における各ノード間の隣人効果が次数の大小とどのような関係を持つかに大きく依存することを明らかにする。最後の節で結論を述べる。

## 2 2 × 2 協調ゲームとイノベーション拡散の閾値

ネットワーク  $(N, L)$  はノードの集合  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  とノード間に張られたリンク接続の状態  $g \subseteq N \times N$  によって定義される。  $g = (g_{ij})$  とする。ノード  $i$  からノード  $j$  へのリンク接続の状態は  $g_{ij}$  で表現され、  $g_{ij} = 1$  のとき  $i$  から  $j$  へのリンク接続が確立されている。リンク接続がないときは、  $g_{ij} = 0$  である。ノード  $i$  の隣人集合を  $N_i = \{j \in N : g_{ij} = 1\}$  と定義し、ノード  $i$  の隣人の数  $z_i = |N_i|$  を  $i$  の次数という。ネットワークの次数分布は

$$p_k = \frac{|\{i \in N : z_i = k\}|}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

となる。以下では、リンク連結は双方向である、つまり、  $g_{ij} = g_{ji}$  であるようなネットワークを対象とする。

$M \subset N$  をノードの部分集合とすると、  $M$  に属する各ノード  $i$  に対して、その隣人  $j \in N_i$  が集合  $M$  に属する割合を

$$\pi^i(M) = \frac{|\{j : g_{ij} = 1, j \in M\}|}{z_i}$$

と表記する。これをノード  $i$  の密着度 (cohesiveness) という。集合  $M$  の全体的密着度 (overall cohesiveness) は各ノードの密着度の大きさ  $\pi^i(M)$  の最小値として定義される。

$$\pi(M) = \min_{i \in M} \pi^i(M).$$

集合  $M$  の密着度  $\pi(M)$  は外的な影響力がどの程度隔離されているかを測る指数である\*4。  $\pi(M)$  が大きいほど、  $M$  に属するノードはより多い割合で隣人を  $M$  内に持つ。  $\pi(M) = 1$  であるならば、すべての隣人は  $M$  内にあるので、  $M$  は連結したコンポーネントであり、外的な影響から完全に隔離されている。

集合  $M$  に属するすべてのノードに対して、その隣人ノードのうち割合  $r$  ( $0 \leq r \leq 1$ ) 以上のノードが集合  $M$  に含まれているならば、ネットワーク  $g$  に関して集合  $M$  は密着度  $r$  を持つという。つまり、  $\pi(M) \geq r$  であるならば、集合  $M$  は密着度  $r$  をもつ。

ネットワーク上で各ノード (プレイヤー) の間の協調ゲームを考える。各プレイヤーは隣人プレイヤーとのみゲームを行える。各プレイヤーの戦略集合は同じで、A、B の 2 種類からなる。  $s_i = \{A, B\}$ ,  $i \in N$ 。戦略に対するプレイヤーの利得は同一で、下表の通りとする。

		j	
		A	B
i	A	(1 + h, 1 + h)	(-1 + h, -1 - h)
	B	(-1 - h, -1 + h)	(1 - h, 1 - h)

ここで、  $h \in (-1, +1)$  はモデルで重要な役割を果たすパラメータで、2 種類の戦略から得られるペイオフにバイアスを与える\*5。この仮定は、プレイヤー  $j \in N_i$  が採用する戦略が A (あるいは B) であるとき、プレイ

\*4 Easley and Kleinberg(2010) では、集合  $M$  に属するノードの隣人ノードのうち  $M$  に属するノード数の割合が  $q$  以上であるとき、集合  $M$  は密度  $q$  のクラスター (a cluster of density  $q$ ) と呼ばれている。

\*5 このペイオフの設定例は Vega-Redondo(2007) が採用した仮定である。Morris(2000) が想定したモデルとは異なっているが、結論は同じになる。これらのモデルは、戦略的補完性を持つグラフィカル・ゲームの特殊ケースに対応する。グラフィカル・ゲームについては、増山 (2013) を参照のこと。

ヤー  $i$  も同じ戦略 A(あるいは B) を選択するように動機付けている。隣人プレイヤーが戦略を変更しない限り、どのプレイヤーも戦略を変更しない。ここで提起される案件は、少数のプレイヤーのグループが戦略を変更したとき、少数のプレイヤーによるこの戦略変更の行動がネットワーク全体に感染するか、否かを解明することである。

ネットワーク上での伝染あるいは模倣の過程を以下のように単純化する。ゲームは離散時間  $t = 1, 2, 3, \dots$  で進み、各時刻  $t$  ですべてのノードは同時に戦略を選択する。各ノードは隣人ノードの行為(戦略)に反応して、自分の戦略を A にするか、B にするかをアップデートする。時刻  $t$  で、隣人ノードの行為を観察したとき、各ノードの戦略のアップデートは時刻  $t + 1$  で行われる。

隣人プレイヤーの戦略を所与として、ある少数のプレイヤーが戦略を変更したとき、自分もこの戦略変更に従うことが有利にならない限りだれも戦略変更に従わない。時刻  $t$  でのプレイヤーの戦略プロファイル  $\mathbf{s}(t) = (s_1(t), s_2(t), \dots, s_n(t))$  を表記する。時刻  $t + 1$  になったとき、プレイヤー  $i$  が戦略を B から A に変更するためには、プレイヤー  $i$  にとって、戦略 B を選択するよりも A を選んだときのペイオフの方が大きい条件

$$(1+h)|\{j \in N_i : s_j(t) = A\}| + (-1+h)|\{j \in N_i : s_j(t) = B\}| > (-1-h)|\{j \in N_i : s_j(t) = A\}| + (1-h)|\{j \in N_i : s_j(t) = B\}|$$

が必要である。この条件を整理すると、

$$\frac{|\{j \in N_i : s_j(t) = A\}|}{z_i} > q \tag{1}$$

となる。ここで、 $q = \frac{1-h}{2}$  である。この条件は、隣人プレイヤーのうち戦略 A を選んでいるプレイヤーの割合が  $q$  を越えていることを要求している。 $h > 0$  のとき、 $q < 1/2$  であり、 $h < 0$  のとき  $q > 1/2$  となる。この臨界的な水準  $q$  を追従または模倣の閾値 (imitation threshold) と呼ぶことにする。ある時点で、 $q$  を越える割合の隣人プレイヤーが戦略を変更するとき、この隣人達に連結したプレイヤーがこれに従う。戦略 A を選んでいるプレイヤーの集合が  $S$  であり、それ以外のプレイヤーは戦略 B を選択しているとする。 $S$  に属さないプレイヤーは  $S$  内にも隣人の割合が  $q$  以下でなければいけない。言い換えると、 $S$  に属さないプレイヤーの隣人のうち、割合  $1 - q$  を越えた隣人を  $N - S$  内に持っていなければいけない。このとき、集合  $N - S$  は密着度  $1 - q$  をもつ。

意思決定を変更するという行為がネットワーク全体に伝染するか否かは模倣の閾値  $q$  に大きく依存する。上で見た通り、模倣の閾値  $q$  は協調ゲームにおけるペイオフの大小関係によって定まる。各プレイヤーが均質的でないとき、各プレイヤーのペイオフが同一であるとは限らない。この場合、模倣の閾値はプレイヤーごとに異なる\*6。

また、ネットワーク全体への伝染可能性はネットワーク・リンク連結の構造にも大きく依存することは容易に想像できる。密着度の大小はリンク連結のアーキテクチャーの特徴に大きく依存する。上で既に指摘した通り、部分ネットワークの密着度が大きいほど、ネットワークにおける各部分ネットワークの孤立性が高まる。だから、密着度が大きい部分ネットワークからなるネットワークほど、ネットワーク全体への伝染性は低くなる。以下の補題が成立する。この補題の証明は上での議論からも自明である。

\*6 非均質なプレイヤーを明示的に導入したケースについては、後節で分析する。

### 補題 2.1

ネットワーク  $(N, L)$  上での均質なプレイヤーによる協調ゲームを考える。この協調ゲームでは、模倣の閾値が  $q$  である。このとき、プレイヤーの空でない部分集合  $M$  が密着度  $q$  を持ち、その補集合  $N - M$  が  $1 - q$  以上の密着度をもつならば、このネットワーク上では、2種類の戦略が共存する純粋戦略均衡が存在する。

ネットワークが2つのコンポーネントからなる場合、上の補題が成立つことは明らかである。なぜなら、コンポーネントの密着度は1であるから、いかなる  $q$  の値に対して、密着度  $q$  以上であることと、密着度  $1 - q$  以上であることを満たす。以下の図に示されている2つの部分ネットワーク（以下、クラスターと呼ぶ）から構成されるネットワークで、各クラスターの密着度が  $2/3$  である。この場合、模倣の閾値  $q$  が  $1/3$  と  $2/3$  の間にあるとき、各クラスターの密着度は  $1 - q$  以上になる。よって、補題の条件は満たされる。補題の条件が満たされるネットワークでは、意思決定の変更がネットワーク全体に感染するような現象は起きない。

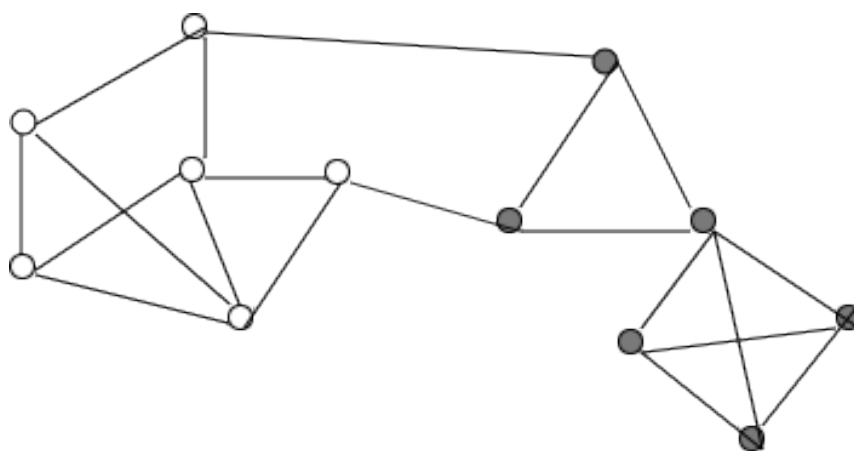


Fig.2 密着度  $2/3$  を持つ2つのクラスターからなるネットワーク

上記補題の前提が成立しない場合、ネットワーク全体での感染現象が起こる。言い換えると、以下の補題が成立する。

### 補題 2.2

ネットワーク  $(N, L)$  上での均質なプレイヤーによる協調ゲームを考える。この協調ゲームでは、模倣の閾値が  $q$  である。 $m$  人のプレイヤーからなる有限集合  $M$  の補集合  $N - M$  の、いかなる部分集合も密着度  $1 - q$  以上の密着度を持たない ( $\pi(S) < 1 - q, \forall S \subseteq N - M$ ) とする。このとき、 $m$  人のプレイヤーからなる有限集合  $M$  で起こった意思決定の変更はネットワーク全体に伝染する。

証明： $m$  個のノードを持つ集合  $M$  を考える。その補集合の部分集合の一つ  $S$  が密着度  $1 - q$  以上の密着度を持つならば、 $S$  に属するすべてのプレイヤーは意思決定を変更しない。 $M$  に属さないプレイヤーに意思決定の変更が伝染するためには、 $M$  の補集合のすべての部分集合が密着度  $1 - q$  以上の密着度を満たしてはいけな。十分条件を示す。 $M$  の補集合のすべての部分集合が密着度  $1 - q$  以上の密着度を持たないならば、この補集合に属する一つのノード、例えば、 $j$  が  $M$  の中に少なくとも  $q$  以上の割合で隣人を持つ。このとき、 $j$  は  $M$  で起きた意思決定の変更に従う。この追従行為は、 $M$  の中に  $q$  以上の割合で隣人を持つすべてのノードに伝染する。従って、最終的には、 $M$  の補集合のすべての部分集合は密着度  $1 - q$  未満なので、意思決

定の変更は  $M$  の補集合のすべてのノードに伝染する。□

この補題の含意はクリアーでコンパクトであるが、補題の条件をチェックする作業は容易でない。ちなみに、 $n$  個のノードを持つネットワークで、ノードの部分集合の数は  $2^n$  であるから、 $n$  が非常に大きくなると、部分集合の密着度を調べ尽くすことは大変な作業となる。大規模なネットワークでは、この補題の条件が満たされるか否かを判定することは現実的でない。

次に、ネットワークにおける伝染の閾値 (contagion threshold) なる概念を導入する。上で説明したように、ノードの集合  $M$  で意思決定の変更が行われたとき、模倣の閾値  $q$  が所与であるとして、補集合  $N - M$  の密着度  $p$  が  $1 - q$  より大きいならば、この意思決定の変更はネットワーク全体に伝染しない。ネットワーク全体への伝染の可能性はネットワーク内のクラスターの密着度と大きく関係する。集合  $M$  内に占有率  $p$  以上で隣人ノードを持つ  $M$  に属するノードの集合を  $\Pi^p(M)$  と表記する。つまり、

$$\Pi^p(M) = \{i \in N : \pi^i(M) \geq p\}.$$

この集合は、集合  $M$  で起きた新技術の採用に対して、これを観察した隣人ノードうち、新技術を採用すると決定したノードの集合、言い換えると、隣人の行為を模倣したノードの集合 (1 回目の模倣を行ったノードの集合) である。時間が進むにつれて模倣行為が伝搬して行く。 $\Pi^p(\Pi^p(M))$  は第 2 段階目のアップデートにおいて模倣を行ったノードの集合である。第 1 段階で模倣を行ったノードの集合  $\Pi^p(M)$  の隣人のうち新技術の採用を模倣したノードの集合である。ここで、 $[\Pi^p]^2(M) = \Pi^p(\Pi^p(M))$  と表記する。 $k$  段階目のアップデートにおいて新技術の採用を模倣したノードの集合を  $[\Pi^p]^k(M)$  と表現する。

Morris(2000) に従って、ネットワーク全体への伝染を可能とする最大な密着度  $\xi$  を伝染の閾値 (contagion threshold) と定義する。模倣の閾値  $q$  が伝染の閾値  $\xi$  よりも小さければ、イノベーションはネットワーク全体に拡散する。

## 定義 2.1 (伝染の閾値)

ネットワーク  $(N, L)$  における伝染の閾値  $\xi$  は

$$\xi = \max\{p : \text{ある有限なノードの集合 } M \text{ に対して、} \cup_{k \geq 1} [\Pi^p]^k(M) = N \text{ を満たす } p\}$$

と定義される。

伝染の閾値を直観的に理解するために、いくつかの例を挙げる。最初に、直線上に各ノードが連結されたネットワークを取り上げる。ノードのラベルを  $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  とし、すべてのノードが戦略 B を選んでいたとする。ある時点  $t = 1$  で、ノードの集合  $S = \{-1, 0, 1\}$  が戦略を A に変更したとする。さらに、追従の閾値を  $q$  とする。各ノードは 2 つのノードに連結されているので、もし追従の閾値が  $q < 1/2$  であるならば、時刻  $t = 2$  で、ノード  $-2$  および  $+2$  はノード  $-1, +1$  の行為に追従する。さらに、時刻が進み  $t = 3$  になると、ノード  $-3$  と  $+3$  が追従する。こうして時刻が経過して行くにつれて、ネットワークのすべてのノードは戦略 B を選択した状態となる。ノードの集合  $S$  の行為がネットワーク全体に伝染する。他方で、 $q > 1/2$  である場合、ノード  $\{-2\}$  と  $\{+2\}$  はノード  $\{-1, +1\}$  の戦略変更に追従しない。よって、どのノードも  $S$  の行為に追従しない。このことは、伝染の閾値が丁度  $1/2$  であることを示している。

次に、ノードが  $m$  次元格子状に連結されたネットワークを取り上げてみる。隣接する各格子点は長さ 1 の距離にある。 $x_i$  および  $y_i$  を各格子点の座標軸上の位置とすると、点  $x$  と  $y$  の距離を

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^m |x_i - y_i|$$

と定義する。距離  $d = 1$  内に位置するノードの間にリンクが張られているとする。2次元格子状になっているとき、つまり、 $m = 2$  のとき、各ノードは4本のリンクを持つ。このとき、伝染の閾値は  $\xi = 1/4$  となる。この事実を説明する。例えば、追従の閾値が  $q = 1/2 > 1/4$  であるとしよう。新技術を採用したノードの集合に属する一つのノードを  $x$  とする。 $x$  にリンクするノードのうちまだ追従していないノード  $y$  から見ると、4本のリンク先ノードのうち一つのノードだけが意思決定を変更したと判断する。 $y$  のリンク先ノードのうち意思決定を変更したノードの割合は  $1/4$  となり、 $\xi = 1/4 < q = 1/2$  なので、 $y$  は追従しない。一般的に、格子の次元が  $m$  である場合、各ノードは  $2m$  のリンク先ノードを持つ。よって、伝染の閾値は  $\xi = 1/(2m)$  となる。

点  $x$  と  $y$  の距離を

$$d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_m - y_m|\}$$

と定義する。距離  $d = 1$  内に位置するノードの間にリンクが張られているとする。

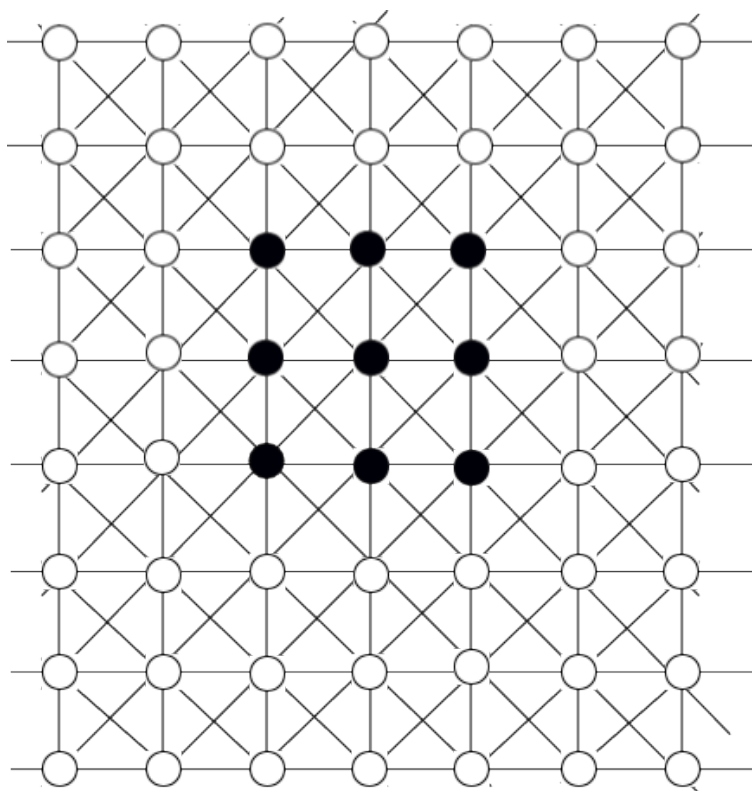


Fig.1 2次元格子の例 ( $d = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$  のケース)

2次元格子状になっているとき、各ノードは8個のノードとリンクしている。このケースでは、伝染の閾値はどれほどになるのか。黒丸のノードが新技術を採用したとする。追従の閾値が  $q = 1/8$  であるとき、黒丸ノードにリンクする白丸ノードは  $1/8$  以上の割合で黒丸ノードとリンクしているので、新技術を選択することに追従する。従って、ネットワーク全体に新技術は伝搬する。結論としては、ネットワーク全体に模倣が伝染する為に必要な追従の閾値は  $3/8$  以下であれば良い。言い換えると、伝染の閾値は  $\xi = 3/8$  である。なぜなら、白丸ノードの中で黒丸ノードにリンクする割合が  $3/8$  となるノードが4個存在するからである。



上の例では、伝染の閾値はすべて  $1/2$  以下であったが、伝染の閾値が  $1/2$  を越えるようなネットワークは存在するだろうか。以下の補題がこれに答える。

### 補題 2.3

いかなるネットワーク  $(N, L)$  の伝染の閾値も  $1/2$  以下である。

この補題の証明は簡単である。新技術を採用した最初のノードの集合が  $S$  であるとき、1 回目の意思決定のアップデート後に新技術を採用しているノードの集合を  $h_q(S)$  とする。ここで、 $q$  は模倣の閾値である。 $k$  回目の意思決定のアップデート後に、新技術を採用しているノードの集合を  $h_q^k(S)$  と表記する\*7。  $S_j = h_q^j(S)$  と表現する。ノードの集合  $X$  に対して、 $X$  にリンク先隣人を持つノードの集合を  $\delta(X)$  と表記し、その数を  $|\delta(X)|$  と表記する。

最初に、 $q > 1/2$  と仮定する。 $S$  は任意の有限個のノードの集合とする。 $S_{j-1} \subsetneq S_j$  となるすべての  $j$  に対して、 $|\delta(S_j)| < |\delta(S_{j-1})|$  であることを証明する。 $S_j - S_{j-1}$  に含まれるノード  $v$  を任意に選ぶと、 $v$  は  $\delta(S_{j-1})$  に含まれるが、 $\delta(S_j)$  には属さない。 $v$  のリンク先ノードのうち  $N - S_j$  に含まれるノードがあれば、これらのノードは  $\delta(S_j)$  に属するが、 $\delta(S_{j-1})$  には属さない。 $q > 1/2$  であるから、 $v$  のリンク先ノードの数は  $N - S_j$  に属するものよりも  $S_{j-1}$  に属するものの方が多い。言い換えると、 $v$  のリンク先ノードの数は  $S_j$  よりも  $S_{j-1}$  に属するものの方が多い。 $S_j - S_{j-1}$  に含まれるノード  $v$  すべてに関して和を取れば、 $|\delta(S_j)| < |\delta(S_{j-1})|$  となる。

$|\delta(S)| > |\delta(S_1)| > |\delta(S_2)| > \dots$  となるので、すべての  $j$  に対して  $|\delta(S_j)| \geq 0$  であるから、ある整数  $k$  に対して、 $S_k = S_{k+1} = S_{k+2} = \dots$  が成立しなければならない。いかなるノードの集合  $S$  で起きた新技術の採用もネットワーク全体に伝染しない。□

戦略集合は A と B の 2 種類からなる 2 者択一意思決定問題を仮定してきたが、可能な戦略としてハイブリッド戦略を認めるとき、更には、3 種類以上の戦略を認めるとき、今までの議論がどのように修正されるのだろうか。この疑問に対して、Immorlica, et al.(2007) は、A、B の行為以外に、A および B と互換的な AB というハイブリッド戦略を導入したモデルを提案し、感染が起こるために閾値が満たすべき領域を導出している。

案件：

各プレイヤーの模倣の閾値が確率分布しているケースでの分析が必要

## 3 ランダムネットワークにおけるイノベーションの浸透モデル：母関数アプローチ

模倣の閾値あるいは追従の閾値概念に基づくアプローチを病原菌やウイルスの感染過程の研究で発展してきた SIR ランダムネットワーク・モデルや SIS ランダムネットワーク・モデルに応用して、社会的ネットワークにおけるイノベーションの浸透過程を理解する。イノベーションの浸透度を理解するために、確率分布から導出される母関数 (generating function) の概念を用いて、新技術を適用したノード群からなるクラスターの

\*7 新技術採用の意思決定した後、この意思決定は持続されると仮定する。意思決定が可逆的である場合でも、結論は同じとなる。Kleinberg(2007) を参照のこと。

規模を計算する方法を導入する\*8。

ネットワークの次数分布が  $p_k, k = 0, 1, 2, \dots$  で与えられているとき、対応する母関数を  $G_0(x)$  と表記すると、

$$G_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k \quad (2)$$

と定義される。 $p_k$  は各ノードの次数が  $k$  となる確率を示す。当然、 $G_0(1) = \sum p_k = 1$  と正規化されている。また、 $|x| \leq 1$  と仮定する。

母関数は元の確率分布のすべての情報を持っている。次数が  $k$  となる確率  $p_k$  は、母関数の  $k$  次微係数を計算すれば復元できる。正確には、

$$p_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k G_0}{dx^k} \right|_{x=0} .$$

ネットワーク全体での次数の平均値は

$$d_1 = \langle z \rangle = \sum_k k p_k = G'_0(1)$$

と計算できる。より一般的に、

$$\langle z^n \rangle = \sum_k k^n p_k = \left[ \left( x \frac{d}{dx} \right)^n G_0(x) \right]_{x=1}$$

が成立つ。ノード間の次数分布が互いに独立である場合、2つのノードの次数の和の確率分布の母関数は、各ノードの母関数の積  $G_0(x)^2$  となる。一般的に、 $m$  個のノードの次数の和の確率分布に対応する母関数は  $G_0(x)^m$  である。

ネットワークの統計量で重要な概念の一つは、任意に一つのリンクを選択したとき、このリンクに連結されているノードの次数分布にかかわる統計量である。この次数分布を  $\xi_k, k = 0, 1, 2, \dots$  とするとき、このリンクに沿って到達したノードの次数は  $k p_k$  に比例する。だから、その次数分布は  $\xi_k = k p_k / \sum_k k p_k$  となるので、対応する母関数は

$$\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k x^k = \frac{\sum_k k p_k x^k}{\sum_k k p_k} = x \frac{G'_0(x)}{G'_0(1)}$$

となる。今、ランダムに一つのノード  $i$  を選び、そのノード  $i$  から出ているリンク先のノード  $j$  を考える。このノード  $j$  の次数  $d_j$  から元のリンク  $\{i, j\}$  を差し引いたときの、 $j$  の次数分布  $\hat{\xi}_k$  は

$$\hat{\xi}_k = \xi_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

となるので、対応する母関数は

$$G_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\xi}_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k x^{k-1} = \frac{G'_0(x)}{G'_0(1)}$$

---

\*8 ランダムネットワーク上での感染現象の分析に母関数を導入した研究は、Callaway, et al.(2000)、Newman(2002)、および Watts(2002) に代表される。

となる。最初のノード  $i$  から出ているリンク数  $k$  は確率  $p_k$  に従うので、ノード  $i$  に連結する隣人の隣人数  $(z_1 - 1) + (z_2 - 1) + \dots + (z_k - 1)$  の確率分布に対応する母関数は

$$\sum_k p_k [G_1(x)]^k = G_0(G_1(x))$$

となる。ここで、 $k$  個の独立な確率分布  $\hat{\xi}$  の和の母関数は各確率分布の母関数  $G_1(x)$  の積  $[G_1(x)]^k$  になる性質を用いた。この関係式から、隣人の隣人数の平均値  $d_2$  が計算できる。つまり、

$$d_2 = \left[ \frac{d}{dx} G_0(G_1(x)) \right]_{x=1} = G'_0(1)G'_1(1) = G''_0(1)$$

である。

巨大コンポーネントが発生せず、有限サイズのコンポーネントが複数生まれるとき、各コンポーネントの平均サイズを計算することが必要となる。この計算は母関数を用いると容易に計算できることが知られている。ここで、ネットワーク内の任意のノード  $i$  を取り出し、このノード  $i$  はノード  $j$  にリンクしてるとしよう。隣人ノードの次数分布は  $\xi_k$  である。従って、以下のような可能性が考えられる。

1. 確率  $\xi_1$  で、ノード  $j$  はノード  $i$  のみと連結しており、それ以外のノードとはリンクしていない。
2. 確率  $\xi_2$  で、ノード  $j$  はノード  $i$  およびノード  $k$  と連結している。事前的には、リンク  $jk$  はリンク  $ij$  と同一の性質、同一のノード数分布を持つ。
3. 確率  $\xi_3$  で、ノード  $j$  はノード  $i$ 、およびノード  $k$ 、 $l$  と連結している。事前の情報では、リンク  $jk$  と  $jl$  はリンク  $ij$  と同一の性質、同一のノード数分布を持つ。
4. 以下同じように、確率  $\xi_4, \xi_5, \dots$  で、 $\dots$ 。

ノード  $j$  から出発するリンクに連結するノード数の分布は、事前の情報では、ノード  $i$  から出発するリンクに接続するノード数の分布と同じである。(これを自己準拠性という。) ノード  $i$  の隣人であるノード  $j$  から出発するリンクに連結されているノード数分布に対する母関数を  $\hat{H}_1(x)$  とすると、自己準拠性は

$$\hat{H}_1(x) = x \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k (\hat{H}_1(x))^{k-1}$$

を満たす必要がある\*9。この関係式を用いると、上の式は

$$\hat{H}_1(x) = xG_1(\hat{H}_1(x)) \tag{3}$$

と整理できる。

さて、ここで、ネットワーク上の任意のノードを取り出し、そこから出発する連結経路にリンクするノード数分布に対応する母関数  $\hat{H}_0(x)$  を考えよう。上での議論を援用すると、母関数  $\hat{H}_0(x)$  は

$$\hat{H}_0(x) = x \sum_{k=0}^{\infty} p_k (\hat{H}_1(x))^k$$

を満たす。任意のノードの次数分布に対応する母関数  $G_0(x)$  を用いて上の式を書き換えると、

$$\hat{H}_0(x) = xG_0(\hat{H}_1(x)) \tag{4}$$

---

\*9 母関数の自己準拠性を用いた計算方法および母関数を用いたコンポーネントサイズの計算方法は Newman, Strogatz and Watts(2001) によってランダムグラフの分析に導入された。コンパクトな解説については、Vega-Redondo(2007) の第2章を参照のこと。

が得られる。以上の関係式を活用すると、コンポーネントの平均サイズが計算できる。

平均コンポーネントサイズを  $\langle s \rangle$  と表記する。母関数の性質から

$$\langle s \rangle = \hat{H}'_0(1)$$

なので、式 (4) を微分して、 $x = 1$  とおくと

$$\langle s \rangle = G_0(H_1(1)) + G'_0(\hat{H}_1(1))\hat{H}'_1(1) = 1 + G'_0(\hat{H}_1(1))\hat{H}'_1(1)$$

が得られる。ここで、 $\hat{H}_1(1) = 1$  および  $G_0(1) = 1$  を用いた。式 (3) を微分して  $x = 1$  とおくと、

$$\hat{H}'_1(1) = G_1(\hat{H}_1(1)) + G'_1(\hat{H}_1(1))\hat{H}'_1(1) = 1 + G'_1(1)\hat{H}'_1(1)$$

が得られるので、これを解いて

$$\hat{H}'_1(1) = \frac{1}{1 - G'_1(1)}$$

となる。従って、平均コンポーネントサイズは

$$\langle s \rangle = 1 + \frac{G'_0(1)}{1 - G'_1(1)}$$

と算できる。

$$G'_1(1) = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)\xi(k) = \frac{G''_0(1)}{G'_0(1)}$$

および、 $G'_0(1) = \langle z \rangle = d_1$  を用いると、平均コンポーネントサイズは

$$\langle s \rangle = 1 + \frac{d_1}{1 - d_2/d_1} \quad (5)$$

と簡単に計算できることになる。ここで、 $d_2$  は隣人の隣人数の平均値である。 $d_2/d_1$  が限りなく 1 に近づいて行くと、平均コンポーネントサイズは無限大となる。 $G'_1(1) = 1$  が巨大コンポーネントが突然生まれる相転移の臨界値である。 $d_2 > d_1$  である限り、巨大コンポーネントは存在し続ける。

次に、社会的ネットワークを介したウイルスの伝搬過程を相転移モデルを用いて分析する<sup>\*10</sup>。ウイルスに感染して発病したノードからなるクラスターの性質を調べるために、任意に選んだノードが  $m$  個の感染したクラスターに連結している確率を  $q_m$  として、 $r_m$  を任意に選んだリンク先のノードが  $m$  個の感染したクラスターに連結している確率とする。これらの確率分布に対応する母関数を

$$H_0(x) = \sum_m q_m x^m, \quad H_1(x) = \sum_m r_m x^m$$

とする。いま、次数  $k$  のノードが病原菌に感染する確率を  $\rho_k$  とする。感染するメカニズムの詳細については、ここでは説明しないで感染率のみを仮定する。ランダムに選ばれたノードの次数が  $k$  で感染している確率は  $p_k \rho_k$  である。この確率分布に対応する母関数は

$$F_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \rho_k x^k \quad (6)$$

<sup>\*10</sup> Gai and Kapadia(2010) は母関数アプローチを用いて、銀行をノードとする金融ネットワークにおけるデフォルト感染過程を分析している。

と定義される。 $\rho = F_0(1)$  がネットワーク全体での感染確率の平均値である。任意に選んだリンクに連結するノードの次数は確率分布は  $\xi$  に従うので、隣人ノードの感染確率に対応する母関数は

$$F_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \rho_k x^{k-1} = \frac{\sum_k k p_k \rho_k x^{k-1}}{\sum_k k p_k} = \frac{F'_0(x)}{z_1}$$

である。 $F_1(1)$  は隣人ノードの感染確率の平均である。

一つのリンクをランダムに選び、そのリンクに連結しているノードの中で病原菌に感染（発病）したノード数（感染者のクラスターのノード数）の確率分布に対応する母関数は  $H_1(x)$  である。このクラスターが空の場合もある。選ばれたリンクに連結したノード  $j$  が感染していない確率は

$$1 - \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \rho_k = 1 - F_1(1)$$

に等しい。感染しているノード  $j$  に連結しているとき、この感染ノード  $j$  の隣人の感染確率に対応する母関数は  $F_1(x)$  でなければならない。 $j$  から出るリンクに連結している感染クラスターのサイズ分布は  $H_1(x)$  に従う。 $H_1(x)$  は自己準拠性を持たなければならないので、

$$H_1(x) = 1 - F_1(1) + x \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \rho_k (H_1)^{k-1} \right] = 1 - F_1(1) + x F_1(H_1(x)) \quad (7)$$

が成立する。ランダムに選ばれたノードにリンクされている感染者クラスターのノード数（サイズ）分布に対応する母関数は  $H_0(x)$  である。選ばれたノードが感染していない確率は  $1 - F_0(1)$  で、次数  $k$  で感染している確率は  $\rho_k$  だから、この母関数は上と同様な理由から

$$H_0(x) = 1 - F_0(1) + x \left[ \sum_{k=0}^{\infty} p_k \rho_k (H_1(x))^k \right] = 1 - F_0(1) + x F_0(H_1(x)) \quad (8)$$

となる。 $F_0(x)$  はネットワーク上で感染したノードからなるクラスターのサイズ分布を与えている。この式から感染ノードの平均クラスターサイズや相転移の閾値を計算することができる。

感染したノードのクラスターサイズの平均  $s$  は

$$\langle s \rangle = H'_0(1) = F_0(H_1(1)) + F'_0(H_1(1)) H'_1(1) = F_0(1) + F'_0(1) H'_1(1)$$

と計算できる。ここで、 $H_1(1) = 1$  と正規化した。簡単な計算で、平均クラスターサイズが

$$\langle s \rangle = H'_0(1) = F_0(1) + \frac{F'_0(1) F'_1(1)}{1 - F'_1(1)} \quad (9)$$

となることが分かる。 $F'_1(1) = 1$  が相転移を引き起こす、巨大クラスターを生み出す臨界点である。

各ノードの感染確率が次数に依存せず同一ならば、つまり、すべての次数  $k$  において  $\rho_k = \rho$  ならば、

$$F_0(x) = \rho G_0(x), F_1(x) = \rho G_1(x)$$

が成立するので、(7), (8) 式は

$$\begin{aligned} H_1(x) &= 1 - F_1(1) + \rho x F_1(H_1(x)) \\ H_0(x) &= 1 - F_0(1) + \rho x F_0(H_1(x)) \end{aligned}$$

と簡単化される。感染したクラスターの平均サイズは

$$\langle s \rangle = \rho \left[ 1 + \frac{\rho G'_0(1)}{1 - \rho G'_1(1)} \right] = \rho \left[ 1 + \frac{\rho d_1}{1 - \rho d_2/d_1} \right]$$

と計算できる。相転移を引き起こす感染確率の臨界値  $\rho_c$  は

$$\rho_c = \frac{1}{G'_1(1)} = \frac{d_1}{d_2}$$

で与えられる。感染確率が  $\rho \geq \rho_c$  を満たすとき、いくつかのノードが病原菌に感染するならば、これらのノードから始まる感染過程はネットワークのほとんどすべてのノードを覆い尽くして拡散する。直観的には、ネットワークの次数分布の分散が平均値に比較して大きければ大きいほど、巨大クラスターに感染し易い。従って、ポアソン・ランダムネットワークに比較して、スケールフリー・ネットワークにおいて、より容易に巨大クラスターに感染する。単純なスケールフリー・ネットワークの分散は無限大なので、病原菌の感染に無防備である。

新技術を採用するときや新製品を購入しようとするとき、人々は社会的なネットワークを介して友人や知合いの行動や意見に大きな影響を受ける。ネットワーク上に配置された各主体は 2 種類の選択、A または B という行為を選択できるとする。行為 B がデフォルトの状態とする。各主体  $i$  が社会的ネットワーク上で  $k_i$  人の隣人を持つとき、彼らの行動を観察して、行為 A を採用している人数を  $r_i$  とする。主体  $i$  の新技術の採用から得られるネットワーク効果の大きさを  $f(k_i, r_i)$  とするとき、

$$\theta_{k_i} \leq f(k_i, r_i)$$

ならば、主体  $i$  は行為 A を模倣する。そうでなければ、行為 B を続けるとする。各主体に対して確率密度分布  $h(\theta)$  からランダムに選ばれたある閾値  $\theta_k$  が一様に与えられる。 $h(\theta)$  は単位区間  $[0, 1]$  の上に定義された密度関数で、 $\int_0^1 h(\theta) d\theta = 1$  と正規化されている。 $\theta_k$  を次数  $k$  を持つノードの適用の閾値 (threshold to adopt or imitate) と呼ぶ。

初期では、すべてのノードはデフォルト B を採用しており、突然、非常に少ない数のノードが行為 B から行為 A に選択を変更したとする。それ以降、各時刻で、すべてのノードはランダムに隣人の状態を観察して自身の行為の選択を変更するか否かの意思決定をする。行為を B から A に変更するならば、この行為の変更は不可逆的で、行為 A から B に戻すことはできないとする。行為の B から A への変更は上で述べた適用の閾値ルールに従うので、各ノードの意思決定は隣人の行為に大きく依存する。各ノードの次数  $z_i$  は確率分布しているので、ノードは互いに異質の次数に直面する。次数の確率分布は所与であり、次数  $k$  となる確率は  $p_k$  と表記する。ネットワークのリンクは双方で交信可能で、各ノードの平均次数  $\langle z \rangle$  はネットワークのサイズ  $n$  に比較して非常に小さいとする。簡単化のために、 $n$  は無限大に近いとする。また、十分に大きなカスケード現象が起きたという意味は、無限数のノードからなるネットワーク上で、考察しているカスケード現象が無視できない大きな占有率をもつクラスター・ノードで観察されることである。

最初に Watts(2002) が採用した最も単純な閾値関数のケースを分析する。つまり、次数  $k$  を持つノードがそのうち  $r$  人の隣人が新技術を使用していることを観察したとき、閾値関数が  $h(k, r) = r/k$  であると仮定する。このとき、新技術を採用する確率  $\rho_k(r)$  を以下のように想定する。

$$\rho_k(r) = \Pr[\theta \leq \frac{r}{k}]$$

この仮定のもとでは、 $r$  が与えられたとき、次数  $k$  が増大するにつれて、採用確率は低下する。イノベーションによる新技術の開発がごく少数（1、2社）の主体によって採用されたとき、この新技術の採用が巨大な波となって社会的ネットワーク全体の大多数の主体に拡散していく過程を対象としている。この場合、拡散の初期では、新技術を採用した一人の主体が隣人の一人に影響力を与えて、この隣人が新技術を採用するという拡散経路をたどると思われる。この想定を認めるならば、 $k$  人の隣人を持つ主体が新技術を採用するか否かは、隣人の一人が新技術採用に大きな影響力を及ぼすか否にかかっている。よって、新技術採用の確率は  $r$  に依存しない形式で表現する方が便利である。つまり、

$$\rho_k = \Pr[\theta \leq \frac{1}{k}]$$

と定義する。

上で展開した母関数の性質から

$$H_1(x) = 1 - F_1(1) + xF_1(H_1(x)), \quad (10)$$

$$H_0(x) = 1 - F_0(1) + xF_0(H_1(x)) \quad (11)$$

が成立する。新技術を採用したノードからなるクラスターの平均サイズは

$$\langle s \rangle = H'_0(1) = F_0(1) + \frac{F'_0(1)F'_1(1)}{1 - F'_1(1)} \quad (12)$$

で与えられる。相転移が起きる条件（グローバルなカスケード現象が起こる条件）は  $F'_1(1) = 1$  である。 $F'_1(x) = \sum_k k(k-1)p_k\rho_k x^{k-1}/\langle z \rangle$  なので、グローバルなカスケード現象の臨界条件は

$$F''_0(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)p_k\rho_k = \langle z \rangle \quad (13)$$

と表現できる。以下では、 $\langle z \rangle = z$  とおく。 $k(k-1)$  は  $k$  の増加関数であるが、 $\rho_k$  は  $k$  の減少関数である。従って、この臨界条件を満たす解（平均次数）は2つ存在する可能性がある。

グローバルなカスケード現象の臨界条件 (13) を満たす解（平均次数）を解析的に求めることはできない。数値計算の手助けを借りる必要がある。

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)p_k\rho_k$$

とおく。閾値  $\theta$  の分布をステップ関数

$$h(\theta) = \delta(\theta - \theta_0)$$

と仮定する。この場合、新技術を採用する確率は

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k \leq 1/\theta_0 \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases} \quad (14)$$

で与えられる。 $k_0 = 1/\theta_0$  とおくと、 $k \leq k_0$  のとき、 $\rho_k = 1$  である。このとき、

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{k_0} k(k-1)p_k\rho_k$$

である。

最初に、ポアソン・ランダムネットワークを取り上げる。ポアソン・ランダムネットワークの次数分布は

$$p_k = \frac{e^{-z} z^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

で与えられる。Watts(2002) のシミュレーションによれば、閾値  $\theta_0$  が増加するにつれて、グローバルなカスケードを起こす  $z$  の範囲は縮小する。 $\theta_0 = 0.1$  のとき、グローバルなカスケードの条件を満たす条件は  $1 < z < 13$  であるが、 $\theta_0 = 0.18$  のとき、 $1 < z < 6$  となる。また、ランダムネットワークの連結性が非常に小さすぎても、大きすぎても、イノベーションのグローバルな浸透現象は起きない。これを確認するために、 $\phi$  を計算すると、

$$\phi^{ER}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)p_k \rho_k = \sum_{k=2}^{k_0} \frac{e^{-z} z^k}{(k-2)!}$$

が得られる。 $k_0 = 1, 2, 3, 4, \dots$  において、それぞれに対して  $\phi^{ER}(z)$  のグラフを実際に描くと、 $\phi^{ER}(z) = z$  を満たす正の実数が存在するためには、 $k_0 \geq 4$  が必要となることが確認できる。 $k_0 = 1/0.1$  および  $k_0 = 1/0.18$  において、 $\phi^{ER}(z) = z$  のグラフを実際に描くと、上記の結果を確認できる。

次に、スケールフリー・ランダムネットワークのケースを取り上げる。次数分布を

$$p_k^{SF} = \frac{k^{-\alpha} e^{-k/\kappa}}{Li_{\alpha}(e^{-1/\kappa})}, \quad k \geq 1$$

と与える。ここで、 $\alpha, \kappa$  は正の定数で、 $Li_{\alpha}(x)$  は一般化リーマン・ゼータ (Rieman-zeta) 関数である。 $\alpha$  が 2 に近づくと、平均次数  $\langle z \rangle$  は無限大になり、 $\alpha$  が非常に大きくなると平均次数は 1 に近づく。スケールフリー・ネットワークにおける  $\phi^{SF}$  を計算すると、

$$\phi^{SF}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)p_k^{SF} \rho_k = \sum_{k=1}^{k_0} \frac{(k-1)k^{-\alpha+1} e^{-1/\kappa}}{Li_{\alpha}(e^{-1/\kappa})}$$

となる。べき乗則分布の平均値は

$$z = Li_{\alpha-1}(e^{-1/\kappa})/Li_{\alpha}(e^{-1/\kappa})$$

である。例えば、 $\alpha = 2.5$  とおき、各模倣の閾値  $k_0 = 2, 3, 4, \dots$  に対して、 $\phi^{SF} = z$  のグラフを描くと、グローバルな拡散を可能とする  $z$  の領域が判明する。 $k_0 < 9$  の範囲では、 $\phi^{SF}(z) = z$  を満たす正の実数解は存在しないことが分かる。閾値  $\theta_0 = 0.18$  では、グローバルなカスケードは起きないことも分かる。 $\theta_0 = 0.1$  のときは、平均次数の領域は  $1 < z < 5$  を満たさなければならない。スケールフリー・ランダムネットワークにおけるグローバルなカスケード現象の臨界条件を満たす  $z$  の領域はポアソン・ランダムネットワークに比べて縮小する。スケールフリー・ランダムネットワークはポアソン・ランダムネットワークに比べてグローバルなカスケード現象が起きにくいと指摘されている。これらの指摘は著者が実際に数値計算を行った結果からも追認できる。

Jackson and Rogers(2007) が提案した拡張版べき乗則分布では、累積分布関数が

$$F(k) = 1 - (rm)^{1+r} (k + rm)^{-(1+r)}$$



で与えられる。ここで、 $r > 0$  は定数で、 $m$  は平均次数  $\langle z \rangle$  となっている。 $r = 0.57$  のときが現実の主要な社会的ネットワークに最も良くフィットしているという。次数の確率分布は

$$p_k = (1+r)(rm)^{1+r}(k+rm)^{-(2+r)} \quad (15)$$

となる\*11。この次数分布のネットワークを拡張型スケールフリー・ネットワークと呼ぶことにする。このネットワークでは、

$$E[k^2] = \frac{2rm^2}{r-1}, \quad r > 1 \text{ のとき}$$

で、 $r = 1$  のとき  $E[k^2] = \infty$  となる。拡張版スケールフリー・ネットワークにおける  $\phi^{GSF}$  を計算すると、

$$\phi^{GSF}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)p_k^{GSF} \rho_k = \sum_{k=1}^{k_0} (k-1)k(1+r)(rm)^{1+r}(k+rm)^{-(2+r)}$$

となる。

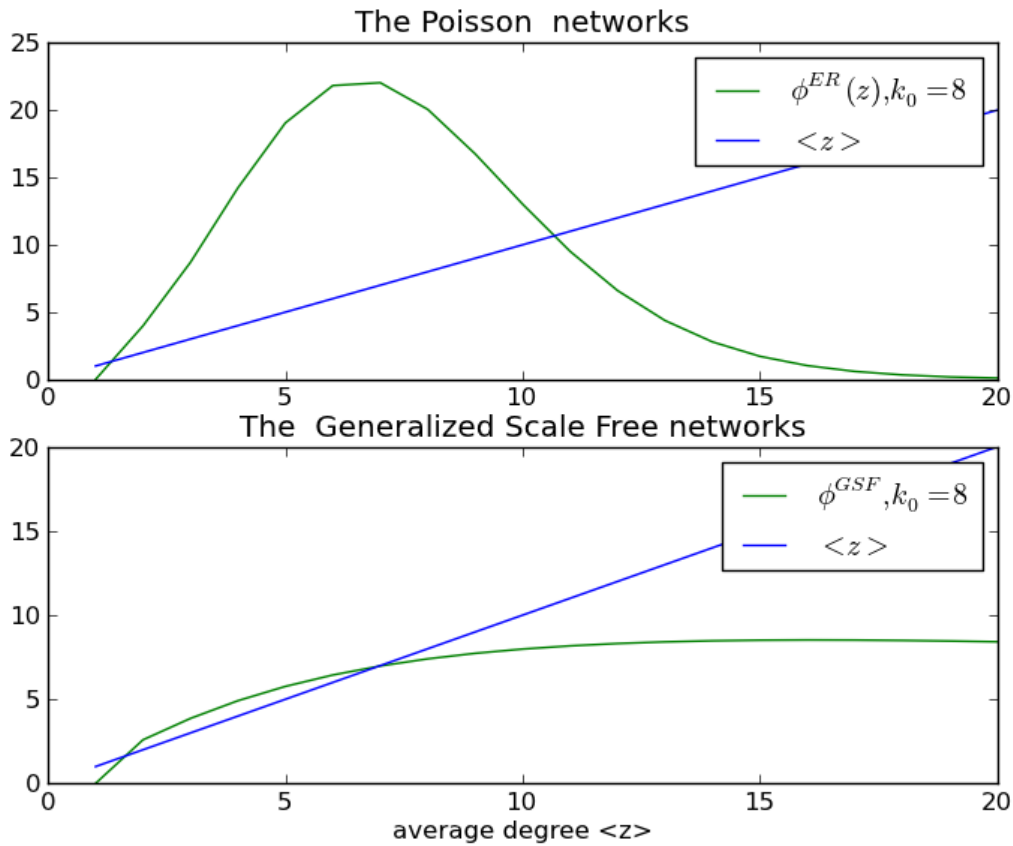


Fig.3 拡張版スケールフリー・ネットワークにおけるパーコレーションの例 ( $k_0 = 8$  のケース)

\*11 Pastor-Satorras and Vespignani(2001) では、次数分布が  $p_k = (1+r)m^{1+r}k^{-(2+r)}, k \geq m$  で与えられるスケールフリー・ネットワークが取り扱われている。

上に示されているグラフからも明確な通り、拡張版スケールフリー・ランダムネットワークにおいても、グローバルなカスケード現象の臨界条件を満たす  $z$  の領域はポアソン・ランダムネットワークに比べて縮小する。ここでも、拡張版スケールフリー・ランダムネットワークではポアソン・ランダムネットワークに比べてグローバルなカスケード現象が起きにくいと確認できる。以下で、この結論が模倣の閾値関数をより一般化したケースにおいても成立するか否かについて考察する。

模倣の閾値が一様分布しているケースに拡張する。閾値  $\theta$  が区間  $[\theta_0, \theta_1]$  に一様に分布しているとする。 $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$  とする。このとき、新技術を採用する確率は

$$\rho_k = \begin{cases} 1.0 & 1/k \geq \theta_1 \text{ のとき} \\ \frac{1/k - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0} & \theta_0 \leq 1/k \leq \theta_1 \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases} \quad (16)$$

で与えられる。 $\theta_0 = k_0, \theta_1 = k_1$  とおく。次数分布がポアソン分布の場合、

$$\phi^{ER}(z) = \sum_{k=k_1}^{k_0} \frac{e^{-z} z^k}{(k-2)!} \frac{1/k - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0}$$

となる。スケールフリーのネットワークの場合、

$$\phi^{SF}(z) = \sum_{k=k_1}^{k_0} \frac{(k-1)k^{-\alpha+1}e^{-1/\kappa}}{Li_\alpha(e^{-1/\kappa})} \frac{1/k - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0}$$

である。拡張版スケールフリーのネットワークの場合、

$$\phi^{SF}(z) = \sum_{k=k_1}^{k_0} k(k-1)(1+r)(rm)^{1+r} (k+rm)^{-(2+r)} \frac{1}{\theta_1 - \theta_0}$$

となる。模倣の閾値が一様分布しているケースでの数値計算例が以下のグラフに示されている。

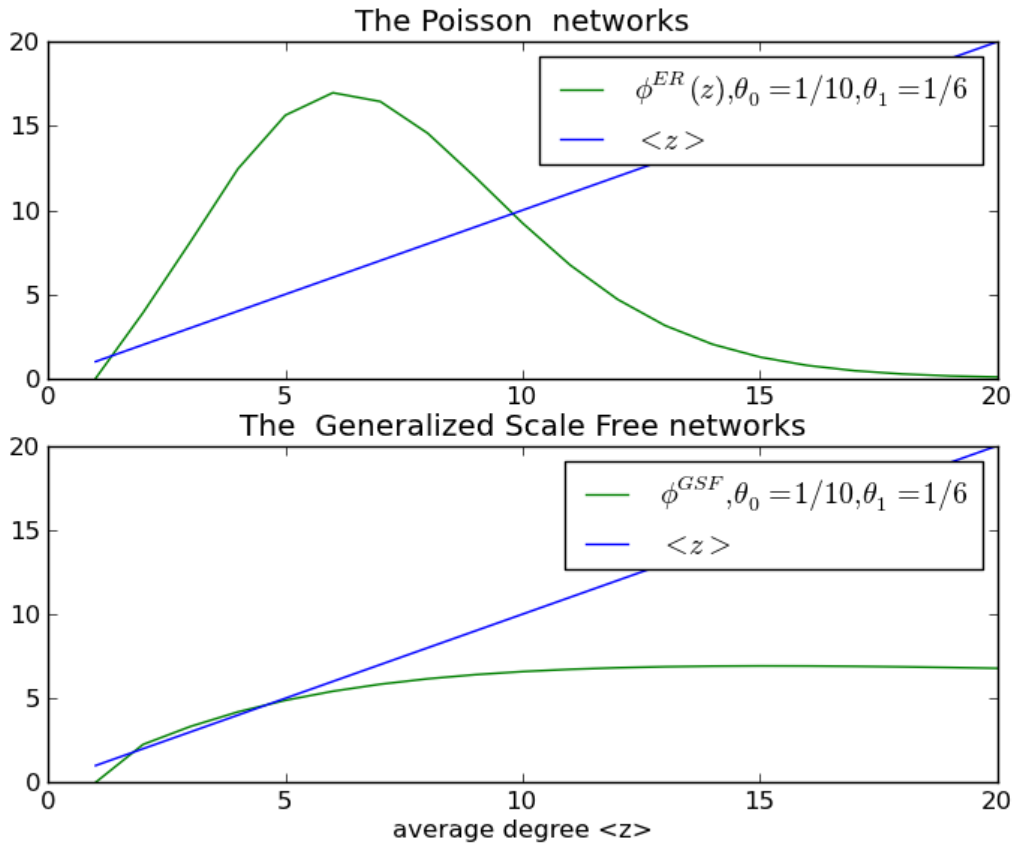


Fig. 4 2種類のネットワークにおけるパーコレーションの例 ( $\theta_0 = 1/10, \theta_1 = 1/6$  のケース)

このケースが端的に示すように、拡張版スケールフリー・ランダムネットワークにおけるグローバルなカスケード現象の臨界条件を満たす  $z$  の領域がポアソン・ランダムネットワークに比べて縮小する。拡張版スケールフリー・ランダムネットワークでは、ポアソン・ランダムネットワークに比べて、グローバルなカスケード現象が起きる範囲がより狭いことを確認できる。通常のスケールフリー・ネットワークでも同じ現象が確認できる。

この結論は、閾値関数が  $f(k, r) = 1/k$  に変形できるケースを前提にしている。もし閾値関数が  $f = k^\alpha r^\beta$  のように、一般的な関数形になるケースへは適用できない。この場合、母関数アプローチは抜本的に修正されなければならない。なぜなら、隣人  $k$  のうち新技術を採用している数  $r$  を明示的にモデルに導入することが必要となるからである。このような修正が母関数アプローチにおいて可能か否を検討することは今後の課題とする。

#### 4 平均場理論を用いたイノベーションの拡散モデル

今までと同じく、ネットワーク  $(N, L)$  はノードの集合  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  とノード間に張られたリンク接続の状態  $L \subseteq N \times N$  によって定義される。  $L = \{g_{ij}\}$  とする。ノード  $i$  からノード  $j$  へのリンク接続の状態は

$g_{ij}$  で表現され、 $g_{ij} = 1$  のとき  $i$  から  $j$  へのリンク接続が確立されている。リンク接続がないときは、 $g_{ij} = 0$  である。ノード  $i$  の隣人集合を  $N_i = \{j \in N : g_{ij} = 1\}$  と定義し、ノード  $i$  の隣人の数  $z_i = |N_i|$  を  $i$  の次数という。連結度は各ノードごとに異なるので、連結度  $k$  を持つノードの比率を確率分布  $p_k$  で表現する。

平均場理論 (mean field theory) を適用するにあたって、社会的ネットワークの規模は無有限大である、つまり、ノード数は無限大と見なせるほど大きいと想定する。また、各時刻でプレイヤー同士の戦略には相関関係がないものとする。言い換えると、各時刻ごとに、社会的ネットワークは同一の次数分布を持つランダムネットワークとして形成される。同一の次数分布を持つランダムネットワークとして各時刻複製されるモデルで導出された結論が、全時刻を通してリンク構造が不変である社会的ネットワークにおけるイノベーションの拡散過程の分析結果と本質的に同じになると予想する。このランダムネットワークの仮定をおかないと、各プレイヤー間の行為に相関関係を認めることになり、平均場近似の妥当性が問題となる。

#### 4.1 イノベーションの連続時間 SIS モデル

各時刻  $t \in [0, \infty)$  で各ノード (プレイヤー)  $i$  はリンク接続した隣人と  $2 \times 2$  協調ゲームを行い、戦略集合  $(A, B)$  から一つの行為を選択する。各プレイヤー  $i$  の戦略集合は同じで、 $s_i = \{0, 1\}$ ,  $i \in N$  となっている。戦略 A を採用することが新技術を適用することだと理解する。時刻  $t$  で、次数  $k$  を持つノードの中で、行為 A を選択しているノードの割合を  $\rho_k(t)$  と表記する。任意に一つのリンクを選んだとき、そのリンクが行為 A を選択しているノードに接続している確率  $\theta(t)$  は

$$\theta(t) = \frac{1}{\langle z \rangle} \sum_{k \geq 1} k p_k \rho_k(t)$$

と与えられる。ここで、 $\langle z \rangle = \sum_k k p_k$  である。次数 (リンク数)  $k$  を持つノードが行為 A を選択した  $r$  人の隣人を持つ確率は

$$\binom{k}{r} \theta(t)^r (1 - \theta(t))^{(k-r)}$$

である。 $\theta(t)$  はすべてのノードから出ているリンクに対して同一の値であり、選ばれたノードの次数やネットワーク上のどの位置にあるかなどには依存していないので、平均場のパラメータとする。 $r$  人の行為 A を選択している隣人を持つリンク数  $k$  のノードが行為 1 を選ぶ推移率を  $f(k, r, \nu)$  と表記する。この変更確率は新製品あるいは新技術の浸透速度  $\nu$ 、隣人数  $k$ 、および新技術を採用した隣人数  $r$  に依存すると仮定する。浸透度による効果と隣人からの影響力効果が独立であると仮定すると、

$$f(k, r, \nu) = \nu f(k, r)$$

と表現できる。 $f(k, r)$  はいわゆる閾値の確率分布関数と同様の役割を果たす。最も単純な関数形は

$$f(k, r) = \begin{cases} 1 & r/k \geq q \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (17)$$

である\*12。ここで、 $q$  が模倣の閾値の役割となる。

\*12 Morris(2000) で  $q$  は模倣の閾値 (imitation threshold) と呼ばれた数値に対応する。この閾値の確率分布関数は López-Pintado(2006) の研究で使用されたものである。Jackson and Rogers(2007) は  $f(k, r) = r + x$  とおいている。ここで、 $x$  はイノベーション自身の浸透スピードを表す定数である。

この想定のもとで、各プレイヤーが自己の戦略を A に変更する遷移率は

$$\hat{g}(\theta(t), k) = \sum_{r=0}^k \nu f(k, r) \binom{k}{r} \theta(t)^r (1 - \theta(t))^{(k-r)}$$

となる。

時刻  $t$  で、連結度  $k$  を持つノードの中で、行為 A を選択しているノードの割合が  $\rho_k(t)$  であるので、ネットワーク全体で行為 A を選択しているプレイヤーの占有率は  $\rho = \sum_k p_k \rho_k(t)$  となる。平均場において動的挙動を表現する期待値変数を  $\rho_k(t)$  とすると、平均場の動的方程式（マスター方程式）は

$$\frac{d\rho_k(t)}{dt} = -\rho_k(t)\delta + (1 - \rho_k(t))\hat{g}(\theta(t), k) \quad (18)$$

となる。ここで、 $\delta$  は新技術を採用したノードが古い技術に戻る速度を表す。第 2 項は、未だ新技術を採用していないノードのうち新技術に変更するノードの比率を表現する。定常状態は  $d\rho_k(t)/dt = 0$  のときである。定常状態では

$$\rho_k = \frac{g(\theta, k)}{1 + g(\theta, k)}, \quad (19)$$

が成立つ。ここで、 $g(\theta, k) = \lambda \hat{g}(\theta, k)$ ,  $\lambda = \nu/\delta$  である。任意に選んだリンクが行為 A を選択しているノードに接続している確率は定常状態で

$$\theta = \frac{1}{\langle z \rangle} \sum_{k \geq 1} k p_k \rho_k \quad (20)$$

で計算できる。式 (19) を式 (20) に代入すると、

$$\theta = H(\theta), \quad (21)$$

が得られる。ここで、

$$H(\theta) = \frac{1}{\langle z \rangle} \sum_{k \geq 1} k p_k \frac{g(\theta, k)}{1 + g(\theta, k)}$$

である。式 (21) の解が定常状態における  $\theta$  の値を定める。この  $\theta$  の値を式 (19) に代入すれば、 $\rho_k$  および  $\rho = \sum_k \rho_k p_k$  の値が計算できる。

明らかに、 $\lambda = \nu/\delta > 0$  であるので、すべての  $\theta \in [0, 1]$  に対して、 $0 \leq H(\theta) < 1$  である。また、すべての  $\theta \in [0, 1]$  に対して、 $\lambda \geq \lambda'$  ならば  $H(\theta; \lambda) \geq H(\theta; \lambda')$  であることを示すのは簡単である。 $H(0) = 0$  であるので、式 (21) を満たす  $\theta$  が存在することは明らかである。 $H(\theta)$  の定義から

$$H'(\theta) = \frac{1}{\langle z \rangle} \sum_{k \geq 1} k p_k \frac{g'(\theta)}{(1 + g(\theta))^2}$$

が得られる。ただし、

$$g(\theta) = \lambda \sum_{r=0}^k f(k, r) \binom{k}{r} \theta(t)^r (1 - \theta(t))^{(k-r)}$$

である。簡単な計算から証明できる通り、 $g'(\theta)$  は非負である。よって、 $H(\theta)$  は非減少関数である。

$H'(0) > 1$  が成立すれば、 $H(\theta)$  のグラフは  $0 < \theta \leq 1$  の範囲で 45 度線と交差する。この交点を  $\theta^*$  とする。不等式

$$H'(0) = \frac{\lambda \sum_{k \geq 1} k^2 p_k f(k, 1)}{\langle z \rangle} > 1$$

が成立すれば、正の定常状態  $\theta^* > 0$  が必ず存在する。この条件は、あるノードが戦略 A を適用したとき、そのノードの隣人のうち少なくとも一人は戦略 A を採用することを意味する。イノベーションが広範囲に浸透するためには、 $\nu$  と  $\delta$  の大きさが

$$\nu/\delta > \lambda^* = \frac{\langle z \rangle}{\sum_{k \geq 1} k^2 p_k f(k, 1)}$$

を満たす必要がある。 $\nu$  と  $\delta$  の大きさが  $\nu/\delta > \lambda^*$  を満たす限り、イノベーションは社会的ネットワーク上の有限なノードからなるクラスターに拡散する。このクラスターのサイズは

$$\sum_k k p_k \rho_k = \sum_k k p_k \frac{g(\theta^*, k)}{1 + g(\theta^*, k)}$$

である。

$H'(0) < 1$  となる時、何が起これるのかを考察する。 $\nu/\delta < \lambda^*$  と仮定する。閾値関数  $f(k, r)$  に関して

$$f(k, 0) = 0, k \geq 1$$

を満たすとする。この仮定はごく自然な仮定である。さらに、関数  $f$  は  $r$  に関して凹関数であることを仮定する。つまり、

$$f(k, r) - f(k, r-1) \geq f(k, r+1) - f(k, r), 0 < r < k$$

が成立つとする。このとき、López-Pintado(2008) が証明したように、 $f$  が凹関数であるならば、 $g''(\theta) \leq 0$  となる。 $H(\theta)$  は非減少関数で、凹関数である。従って、 $H(\theta)$  が凹関数になるので、非ゼロの定常状態は存在しない。関数  $f$  が  $r$  に関して凹関数にならない場合、2 種類のケースが起きる。 $H(\theta)$  が凸関数であるときは、非ゼロの定常状態は不安定であり、原点のみが安定となる。 $H(\theta)$  のグラフが S 字形の曲線を描くとき、非ゼロの交点が存在する場合と 45 度線と交差する場合に分けられる。区間  $(0, 1]$  で二つの交点  $\theta_1, \theta_2 (\theta_1 < \theta_2)$  を持つ場合、イノベーションの初期条件として  $\theta > \theta_1 > 0$  が満たされていなければならない。 $\theta_1$  がイノベーションが拡散するための閾値条件となる。しかし、関数  $H(\theta)$  のグラフが S 字形の曲線を描き、45 度線と  $(0, 1]$  の領域で交差する条件を解析的に見出すことは困難である。

二つのネットワークの連結度 (次数分布)  $p = (p_k)$  と  $p' = (p'_k)$  を比較するとき、連結度  $p$  が  $p'$  を第 2 位に確率的に支配する (second order stochastically dominate) ということがある。連結度  $p$  が  $p'$  を第 2 位に確率的に支配し、同一の期待値  $E[p] = E[p']$  を持とき、 $p'$  が  $p$  の MPS (mean preserving spread) であるという。正確に言えば、 $p'$  が  $p$  の MPS であるとは、任意の凹関数  $f(k)$  に対して、等式

$$\sum_k f(k) p_k \geq \sum_k f(k) p'_k$$

が満たされることである。この条件は、すべての  $x$  に対して

$$\sum_{z=0}^x \sum_{k=0}^z p_k \leq \sum_{z=0}^x \sum_{k=0}^z p'_k$$

が成立することと等価である。直観的には、確率分布  $p'$  の分散が  $p$  の分散よりも大きいことを意味する。

#### 補題 4.1

異なる次数分布  $p$  と  $p'$  を持つ二つのネットワークを考える。それぞれに対応する模倣の閾値を  $\lambda^*(p)$  および  $\lambda^*(p')$  とする。連結度  $p'$  は  $p_k$  の MPS(mean preserving spread) になっているとする。このとき、以下の性質が成立つ。

- (i) もし  $k^2 f(k, 1)$  がすべての  $k \geq 1$  に対して凸関数であるならば、 $\lambda^*(p') \leq \lambda^*(p)$  である。
- (ii) もし  $k^2 f(k, 1)$  がすべての  $k \geq 1$  に対して凹関数であるならば、 $\lambda^*(p') \geq \lambda^*(p)$  である。
- (iii) もし  $k^2 f(k, 1)$  がすべての  $k \geq 1$  に対して線形関数であるならば、 $\lambda^*(p') = \lambda^*(p)$  である。

ネットワークの連結度分布と模倣の閾値関数が定常状態におけるイノベーションの浸透度にどのような影響を与えるかを分析するためには、モデルにおける閾値関数を特定化する必要がある。模倣の閾値が新技術を採用した隣人数のみに依存するケースを考えてみる。このケースは、 $f(k, r) = f(k', r) = f(r), \forall r \geq 0, k, k' \geq 0$  と仮定することに対応する。上の補題によれば、 $k^2 f(k, 1)$  は凸関数なので、 $\lambda^*(p') \leq \lambda^*(p)$  となる。このことは、ネットワークの連結度の分散が大きくなると、感染の閾値が小さくなることを含意する。次数の分散が大きいネットワークほどより容易にイノベーションが浸透しやすいことを意味する。López-Pintado(2008) が使用した以下の例、スケールフリー・ネットワーク、指数関数的ネットワーク、均質ネットワークの3種類を取り上げよう。これらの連結度はそれぞれ以下の通りとなる。

$$p_k^{SF} = \begin{cases} Ck^{-\alpha}, k \geq m, \alpha = 2.5 \\ 0, \text{ それ以外のとき} \end{cases}$$

$$p_k^{EX} = \begin{cases} Ce^{-k/2m}, k \geq m \\ 0, \text{ それ以外のとき} \end{cases}$$

$$p_k^H = \begin{cases} 1, \text{ もし } k = 3m \text{ ならば} \\ 0, \text{ それ以外のとき} \end{cases}$$

これら3種類のネットワークの連結度の平均は同じで、 $3m$  となっている。 $p^{SF}$  は  $p^{EX}$  の MPS であり、 $p^{EX}$  は  $p^H$  の MPS となっている。上の議論から、

$$\lambda^*(p^{FS}) \leq \lambda^*(p^{EX}) \leq \lambda^*(p^E)$$

なる関係が成立する。また、実際に、 $\lambda^*(p^{FS}) = 0$  となっていることは容易に計算できる。スケールフリー・ネットワークは最も病原菌やウイルスの感染に脆弱で、ウイルス等が発生するや常にネットワーク全体に拡散することになる。

上記の結論は、模倣の閾値が新技術を採用した隣人数のみに依存するとした仮定による。通常の世界では、より複雑な関係が見られる。模倣の閾値関数を

$$f(k, r) = \frac{r}{k^\beta}, \beta \geq 0$$

とおくことにする。閾値  $\lambda^*$  は

$$\lambda^* = \frac{z_1}{\langle k^{2-\beta} \rangle}, \langle k^{2-\beta} \rangle = \sum_{k \geq 1} k^{2-\beta} p_k$$

と計算できる。

$\beta = 1$  のとき、連結度  $p'_k$  が  $p_k$  の MPS であるとしても、 $\lambda^*(p) = \lambda^*(p') = 1$  となることが分かる。さらに、

$$\lambda^*(p^{FS}) = \lambda^*(p^{EX}) = \lambda^*(p^H) = 1$$

となっている。 $\beta = 2$  のとき、 $\lambda^*(p) = \lambda^*(p') = \langle z \rangle$  である。より具体的には、

$$\lambda^*(p^{FS}) = \lambda^*(p^{EX}) = \lambda^*(p^E) = \langle z \rangle = 3m$$

である。これらのケースでは、3種類の異なるネットワークにおいてイノベーションの浸透に対する閾値が同一になることを意味する。スケールフリー・ネットワークが他のネットワークに比べて、イノベーションの浸透に優位性を持つとは言えない。

最後に、スケールフリー・ネットワークにおけるイノベーションの浸透度の特異性について考える。連結度分布が<sup>3</sup>

$$p_k = Ck^{-\alpha}, \quad \alpha \in (2, 3]$$

となっているとする。ネットワークがウイルスの攻撃に無防備になる、つまり、閾値  $\lambda^*$  が  $\lambda^* = 0$  となるための必要十分条件は

$$3 - \beta - \alpha \geq 0, \quad \text{つまり、} \quad \beta \leq 3 - \alpha$$

が成立することである<sup>\*13</sup>。従って、 $\beta \leq 3 - \alpha$  が成立する限り、スケールフリー・ネットワークは病原菌やウイルスの攻撃に無力となり、一つのノードがウイルスに感染するとネットワーク全体に感染が伝染する。 $\alpha \in (2, 3]$  なので、この条件は  $0 \leq \beta < 1$  となる。

このモデルでは、新技術が旧技術にスイッチバックする速度  $\delta$  および新技術の浸透速度にかかわる定数  $\nu$  の値が現実のイノベーション拡散現象にどのように関係づけられるのかが不透明である。新技術が旧技術にスイッチバックすることが現実にはあまり見られないならば、 $\lambda \rightarrow +\infty$  なので、ほとんどすべての連結したネットワーク上ではイノベーションは広範囲に拡散できることになる。それゆえ、ネットワークの連結度とイノベーションの浸透度との関係を議論すること自体無意味となってしまう。

## 4.2 イノベーションの離散時間 SIR モデル

Jackson and Yariv(2007) の研究で用いられたモデルを拡張する。各時刻  $t = 1, 2, 3, \dots$  で各ノード（プレイヤー） $i$  はリンク接続した隣人と  $2 \times 2$  協調ゲームを行い、戦略集合  $\{A, B\}$  から一つの行為を選択する。各プレイヤー  $i$  の戦略集合は同じで、 $s_i = \{A < B\}$ 、 $i \in N$  である。隣人  $N_i$  が採用する戦略を  $s_{N_i}$  とするときの各プレイヤー  $i$  の利得を

$$u_i(s_i, s_{N_i}) = v_{k_i}(s_i, s_{N_i}) - c_i(s_i) \quad , \quad k_i = |N_i|$$

とする。 $c_i(s_i)$  は戦略  $s_i$  に伴う費用とする。簡単化のために、戦略 B はデフォルトの戦略なので、戦略 B からの利得はゼロとする。 $v_{k_i}(B, s_{N_i}) = 0, c_i(B) = 0, c_i(1) = c_i$  とする。プレイヤー  $i$  の隣人数が  $k_i$  でそのうち  $r_i$  人が新技術を採用しているとき、 $i$  が戦略 A の採用から受け取るペイオフは

$$v_{k_i}(1, s_{N_i}) = v_i f(k_i, r_i) - c_i$$

<sup>\*13</sup>  $k$  を連続変数で変形して、 $\langle z^{2-\beta} \rangle = \int_1^\infty k^{2-\beta-\alpha} dk$  が無限大になる条件である。



と与えられるとする。ここで、 $f(k_i, r_i)$  は隣人効果を表現している。 $k > 0$  として、 $r > r'$  のとき、 $f(k, r) > f(k, r')$  が成立つならば、隣人から受ける外部効果は正である。反対に、 $r > r'$  のとき、 $f(k, r) < f(k, r')$  であるのならば、負の外部効果が働くと言う。 $v_i, c_i$  は確率変数であり、 $c_i/v_i$  の分布関数を  $F(y) = \Pr(c_i/v_i \leq y)$  とする。繰り返しゲームでよく想定するように、時刻  $t$  で各プレイヤーは、時刻  $t-1$  でのライバルプレイヤーの行為を観察し、その情報のもとで最適な反応 (myopic best response) をするとしよう。従って、

$$\frac{c_i}{v_i} \leq f(k_i, r_i) \quad (22)$$

が成立するときのみ、 $i$  は戦略 A の採用へ戦略を変更する<sup>\*14</sup>。このモデルの基本要素は、連結分布  $p_k$ 、ネットワーク効果としての隣人効果を表現する関数形  $f(k_i, r_i)$ 、確率変数の比率  $c_i/v_i$  の分布関数  $F(\cdot)$  である。

$f(k, r) = r$  のとき、戦略 1 を採用した隣人数だけにペイオフは依存する。戦略 1 を採用した隣人数が増加すれば、隣人効果によりペイオフは増加する。 $f(k, r) = r/k$  のとき、ペイオフは戦略 A を採用する隣人の比率に比例し、ネットワークの次数分布に依存しない。 $q$  を閾値とするステップ関数のとき、例えば、 $f(k, r) = \delta(r/k - q)$  のとき、隣人数のうちイノベーションを適用した比率が模倣の閾値  $q$  を越えるときのみ正のペイオフが生まれる。

各プレイヤー  $i$  は、ネットワーク連結度のランダムな分布  $p_k$ 、彼自身の隣人数  $k_i$  とそのうち戦略 A を採用した隣人数  $r_i = |\{j \in N_i : s_j = A\}|$  および戦略 A を採用するときのペイオフと費用 ( $v_i, c_i$ ) に関する情報を知っている。確率分布  $p_k$  とネットワーク効果関数  $f(k, r)$  は共通知識である。従って、ここでのネットワークゲームはベイジアンゲームとなる。

#### モデル LP:López-Pintado(2008) の定式化

時刻  $t$  で、次数  $k$  を持つノードの中で、行為 A を選択しているノードの割合を  $x_k^t$  と表記する。任意に一つのリンクを選んだとき、そのリンクが行為 A を選択しているノードに接続している確率  $\theta^t$  は

$$\theta^t = \frac{1}{\langle z \rangle} \sum_{k \geq 1} k p_k x_k^t$$

と与えられる。ここで、 $\langle z \rangle = \sum_k k p_k$  である。次数 (リンク数)  $k$  を持つノードが行為 A を選択した  $r$  人の隣人を持つ確率は

$$\binom{k}{r} (\theta^t)^r (1 - \theta^t)^{(k-r)}$$

である。この 2 項分布の平均値は  $\theta^t k$  である。よって、次数 (リンク数)  $k$  を持つノードが行為 A を選択している (平均) 隣人数は

$$r^t = k \theta^t$$

となる。 $\theta^t$  はすべてのノードから出ているリンクに対して同一の値であり、選ばれたノードの次数やネットワーク上のどの位置にあるかなどには依存していない。時刻  $t = 1, 2, \dots$  において、各プレイヤーは時刻  $t-1$  での隣人の戦略に関する情報に基づいて最適な反応をする。時刻  $t = 1$  で、

$$c_i/v_i < f(k, x^0 k)$$

<sup>\*14</sup> Young(1998, 2002, 2011) の研究で採用されている対数線形反応を各プレイヤーの最適混合戦略とするケースへの拡張は後で行う。

ならば、 $i$  は戦略を 1 に変更する。 $c_i/v_i$  の確率分布を  $F(f(k, r)) = \Pr\{c_i/v_i \leq f(k, r)\}$  と表現する。この想定のもとで、時刻  $t$  で次数  $k$  のプレイヤーが戦略 1 を選択する確率は

$$x_k^t = F(f(k, r^{t-1}))$$

となる。時刻  $t$  で、連結度  $k$  を持つノードの中で、行為 1 を選択しているノードの割合が  $x_k^t$  であるので、ネットワーク全体で行為 1 を選択しているプレイヤーの占有率は

$$x^t = \sum_k k p_k F(f(k, k \theta^{t-1})) = \sum_k k p_k F(f(k, k \frac{1}{\langle z \rangle} \sum_{d \geq 1} d p_d x_d^{t-1})) \quad (23)$$

となる。

モデル JY : Jackson-Yariv(2007) の定式化

時刻  $t$  までに、隣人数  $k$  をもつノードのうち戦略 1 を採用しているノード数の比率を  $x_k^t$  と表記し、ネットワーク全体で戦略 1 を採用しているノード数の比率を  $x^t$  で表現する。すなわち、

$$x^t = \sum_k \frac{k p_k x_k^t}{\langle z \rangle}$$

である。ここで、 $\langle z \rangle$  は平均次数である。イノベーションの拡散過程は以下の通り推移する。 $t = 0$  で、イノベーションを適用したノード数が全ノード数のうちの比率  $x^0$  として、各ノードに次数分布  $p_k$  に従ってランダムに割り振る。ランダムに隣人として選ばれたノードのうちの比率  $x^0$  に相当する隣人に戦略 A が割り振られている<sup>\*15</sup>。その後の時刻  $t = 1, 2, \dots$  において、各プレイヤーの隣人は次数分布に従ってランダムに選ばれ、各プレイヤーは時刻  $t - 1$  での隣人の戦略に関する情報に基づいて最適な反応をする。時刻  $t = 1$  で、 $c_i/v_i < 1/(f(k, x^0))$  ならば、 $i$  は戦略を A に変更する。戦略が A に変更された場合、この戦略変更は時間が経過しても元に戻されることはない<sup>と仮定する。</sup>(SIR モデルである。) 時刻  $t = 1$  で、次数  $k$  を持つノードのうち戦略 A を採用しているノードの割合は

$$x_k^1 = F(f(k, r^0)), \quad r^0 = x^0 k$$

である。ただし、 $F(f(k, r^0)) = \Pr\{c_i/v_i \leq f(k, r^0)\}$  とおいた。これを繰り返せば、任意の時刻  $t$  において、

$$x^t = \frac{1}{\langle z \rangle} \sum_k k p_k F(f(k, x^{t-1} k)) \quad (24)$$

が成立する。隣人効果が正であるとき、右辺が  $x^{t-1}$  の非減少関数になることは容易に分かる。 $x^0 = 0$  ならば、 $x^1 = 0$  になる ( $F(k, 0) = 0$  なので)。 $x^1 > x^0$  が起こるとき、時間の経過と共に、 $x^*(x^* > x^0)$  に収束する。

LP モデルも、JY モデルも同じ結論に帰結する。ここでは、取り扱いが容易な JY モデルでのベイジアン均衡の特徴を分析する。動的方程式の右辺を  $\phi(x)$  とおく。つまり、

$$\phi(x) = \frac{1}{\langle z \rangle} \sum_k k p_k G(k, x), \quad G(k, x) \equiv F(f(k, x k)) \quad (25)$$

<sup>\*15</sup> この想定では、各ノードは匿名で、ノードの区別は次数だけである。すべての意思決定の時刻ごとに、次数分布だけは維持されるが、ランダムにリンク接続が変更される。

とおく。  $p_k$  と  $F(\cdot)$  の具体的な関数形を特定すれば、イノベーションがネットワークの巨大クラスターに浸透する為に必要な初期状態  $x^0$  の最小値（以下で定義する転換点）を求めることができる。

$x = \phi(x)$  を満たす  $x^*$  がベイジアン均衡点である。この均衡点  $x^*$  がいかなる特徴を持つかは関数  $\phi$  のグラフと 45 度線の交点を調べれば良い。関数  $\phi$  のグラフは、 $\phi(0) = 0$  であるから原点を通る。また、 $0 \leq F \leq 1$  であるから、 $0 \leq \phi \leq 1$  である。区間  $[0, 1]$  において、均衡点は存在する。関数  $\phi$  のグラフが  $x = 0$  だけで 45 度線と交差するケース、関数  $\phi$  のグラフが  $x > 0$  で 45 度線に 1 回交差するケース、複数回交差するケースを想定できる。最後のケースは複数均衡点が存在するケースに対応する。

#### 定義 4.1

$\epsilon' > \epsilon > 0$  を満たすすべての  $\epsilon$  に対して、 $\phi(x - \epsilon) > x - \epsilon$  かつ  $\phi(x + \epsilon) < x + \epsilon$  が成立つような  $\epsilon' > 0$  が存在するならば、均衡  $x$  は安定であると言う。また、 $\hat{\epsilon} > \epsilon > 0$  を満たすすべての  $\epsilon$  に対して、 $\phi(x - \epsilon) < x - \epsilon$  かつ  $\phi(x + \epsilon) > x + \epsilon$  が成立つような  $\hat{\epsilon} > 0$  が存在するならば、均衡  $x$  は不安定で、転換点 (tipping point) と呼ばれる。

関数  $G$  は連続で、隣人からの外部効果を表現する関数  $g$  は  $x$  の非減少関数であると仮定する。つまり、外部効果は正とする。確率分布関数  $F$  は非減少関数なので、 $g$  が  $x$  の非減少関数であれば、 $F$ 、よって、 $G$  は  $x$  の非減少関数である。式 (25) を満たす二つの推移関数  $\hat{\phi}$  と  $\phi$  を比較して、すべての  $x$  に対して、 $\hat{\phi}(x) > \phi(x)$  であれば、推移関数  $\hat{\phi}$  を持つ拡散過程の方が大きい安定な均衡点とより小さな転換点を持つ。明らかに、 $\phi(0) > 1$  のときは、 $x = 0$  が最小の転換点である。次数分布  $p_k$  の平均値が増大するように、次数分布が変化するならば、すべての  $x$  に対して推移関数  $\phi(x)$  は上方へシフトする。だから、ネットワークの連結度が増加するならば、イノベーション拡散の浸透度はより大きくなり、転換点の閾値は低下するので、イノベーションはより容易に拡散する。

次に、ネットワークの連結度の分散が変化するとき、イノベーションの拡散にどのような影響を与えるのかを考察する。 $\hat{p}$  を  $p$  の MPS とする。 $G$  が非減少凸関数であるとき、 $kG$  も増加、凸関数である。 $kG$  が凸関数であれば、MPS の定義から、

$$\sum_k k\hat{p}_k G(k, x) \geq \sum_k kp_k G(k, x)$$

が成立つ。もし  $G$  が凹関数であるとき、MPS の定義から、

$$\sum_k k\hat{p}_k G(k, x) \leq \sum_k kp_k G(k, x)$$

である。この関係から下の定理が成立つ。

#### 定理 4.1

もし  $kG(k, x)$  が  $k$  に関して非減少な凸関数であるならば、 $\hat{p}$  が  $p$  の MPS であるとき、すべての  $x$  に対して  $\hat{\phi}(x) \geq \phi(x)$  である。ここで、 $\hat{\phi}(x)$  は式 (25) で定義される  $\hat{p}$  に対応する推移関数  $\phi$  である。反対に、 $kG(k, x)$  が  $k$  に関して凹関数であるならば、 $\hat{p}$  が  $p$  の MPS になるとき、すべての  $x$  に対して  $\hat{\phi}(x) \leq \phi(x)$  である。

以上の定理から理解される通り、 $kG(k, x)$  が非減少凸関数であるとき、次数分布の MPS 変化は関数  $\phi(x)$  のグラフを上方に移動させる。確率分布  $\hat{p}$  のもとで  $\hat{x}^*$  が安定な均衡 ( $\hat{x}^* = \hat{\phi}(\hat{x}^*)$ ) であれば、 $\hat{x}^* \geq x^*$  である。つまり、イノベーションはより広範囲に社会的ネットワークに浸透する。同一の平均連結度をもつスケ-

ルフリー・ネットワークにおける推移関数  $\phi^{SF}$ 、ポアソン・ランダムネットワークの  $\phi^{PO}$ 、均質なネットワークの  $\phi^H$  を比較すると、それぞれの分散は  $\sigma^{SF} > \sigma^{PO} > \sigma^H$  の順になっているので、

$$\phi^{SF}(x) > \phi^{PO}(x) > \phi(x)^H$$

なる関係が成立つ。この関係は  $kG(k, x)$  が非減少凸関数であるときを十分条件としている。しかし、 $kG(k, x)$  が  $k$  の凹関数である場合、上の関係式は逆転する。ネットワークの連結度の分散の大小はイノベーションの浸透度の増減と単調には対応しない。ネットワークの連結度の分散の増加がイノベーションの転換点 (tipping point) を低下させ、浸透度を増大させるか否かは、ネットワーク上における各ノード間の隣人効果が次数の大小とどのような関係を持つかに大きく依存する。

例えば、 $f(k, r) = k^\alpha r^\beta = k^{\alpha+\beta} x^\beta$  のケースを考える<sup>\*16</sup>。  $\beta > 0$  とする。  $\alpha + \beta \geq 1$  または  $\alpha + \beta = 0$  であれば、 $f$  は  $k$  に関して凸関数である。また、  $0 < \alpha + \beta < 1$  となるとき、関数  $f$  は  $k$  の凹関数となる。  $F$  が区間  $[a, b]$  で一様分布しているとき、

$$F(g) = \begin{cases} 1, & f \geq b \text{ のとき} \\ \frac{f-a}{b-a}, & b \geq f \geq a \text{ のとき} \\ 0, & a \geq f \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義される。  $F$  は  $f$  の増加関数となっているので、  $\alpha + \beta > 0$  である限り、  $F$  は  $k$  の増加関数となる。

閾値関数  $f(k, r)$  の値が  $a \leq f \leq b$  の区間にあれば、

$$F = \frac{k^{\alpha+\beta} x^\beta - a}{b - a}$$

である。従って、

$$\alpha + \beta > 0$$

のケースでは、

$$kG = \frac{k^{\alpha+\beta+1} x^\beta - ax}{b - a}$$

は  $k$  の非減少凸関数となる。伝染閾値を低下させ、イノベーションの浸透をより広範囲に拡大させることになる。しかし、  $\alpha + \beta < 0$  のとき、  $kG$  が凸であるための条件が満たされる保証がないので、  $kG$  は一般的には必ずしも凸関数にはならない。この場合、連結度の分散が大きくなっても、転換点は低下せず、イノベーションの浸透範囲は拡大しない。また、閾値関数  $f(k, r)$  の値が  $F(k, r) > b$  となる区間が存在する場合も、次数分布の MPS 変化はイノベーションの浸透度を拡大させるとは限らない。以下のグラフの例はこの現象を表現している。

<sup>\*16</sup> Jackson and Yariv(2005, 2007) では、最初から  $r$  は明示的に登場しないので、関数  $f$  は  $r$  には依存しないと仮定され、主として  $f = \nu(k)x$  のケースを考察の対象にしているので、  $\beta = 1$  と仮定している。

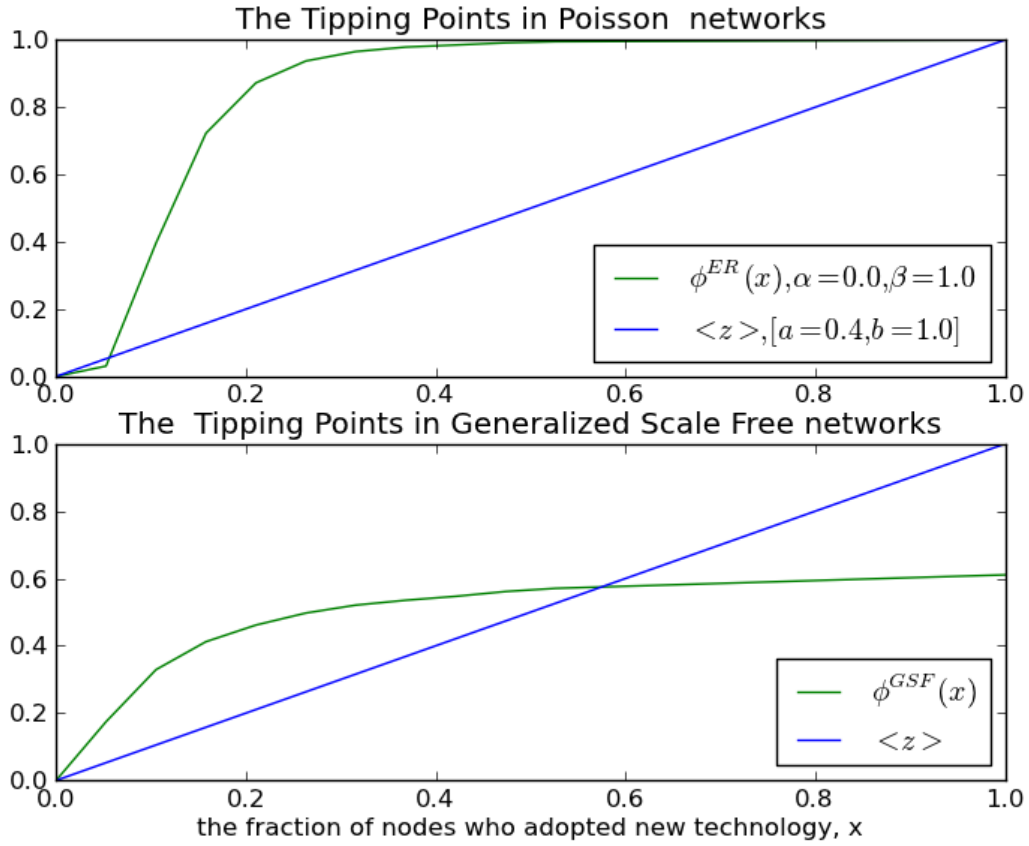


Fig.5 Tipping Points の例 ( $\alpha = 0, \beta = 1, z = 5$  のケース)

**定理 4.2**

$G(k, x)$  はすべての  $k$  に対して  $x$  に関して 2 回微分可能で、増加関数とする。もし  $G(k, x)$  が  $x$  に関して厳密に凹関数であるならば、 $x^{t-1} > x^*$  のとき、 $x^t - x^{t-1} < x^{t+1} - x^t$  が成立ち、 $x^{t-1} > x^*$  のとき  $x^t - x^{t-1} > x^{t+1} - x^t$  となるような正の  $x^* \in [0, 1]$  が存在する。

証明：

$$\frac{d(\phi(x) - x)}{dx} = \frac{1}{z_1} \sum_k k p_k \frac{\partial G(k, x)}{\partial x} - 1$$

なので、

$$\frac{d^2(\phi(x) - x)}{dx^2} = \frac{1}{z_1} \sum_k k p_k \frac{\partial^2 G(k, x)}{\partial x^2}$$

となる。 $G(\cdot)$  の凹性から、 $\frac{d^2(\phi(x) - x)}{dx^2} < 0$  である。

$$\left. \frac{\partial G(k, x)}{\partial x} \right|_{x=x^*} = 1$$

を満たす  $x$  とする。ただし、すべての  $x \in [0, 1]$  に対して  $\frac{\partial G(k, x)}{\partial x} > 1$  であるとき、 $x^* = 1$  とする。また、すべての  $x \in [0, 1]$  に対して  $\frac{\partial G(k, x)}{\partial x} < 1$  であるとき、 $x^* = 0$  とする。 $\frac{d^2(\phi(x)-x)}{dx^2} < 0$  なので、すべての  $x < x^*$  に対して  $\frac{d(\phi(x)-x)}{dx} - 1 > 0$  であり、すべての  $x > x^*$  に対して  $\frac{d(\phi(x)-x)}{dx} - 1 < 0$  である。□

例えば、 $f(k, r) = k^\alpha r^\beta = k^{\alpha+\beta} x^\beta$  のとき、 $0 < \beta < 1$  であれば、 $G(k, x)$  は  $x$  に関して増加関数で、厳密に凹関数である。このケースでは、イノベーションの拡散経路は S 字曲線を描く。もし  $G(k, x)$  が  $x$  に関して厳密に凹関数であるならば、 $x = 0$  がただ一つ均衡点であるか、 $x = 0$  が不安定な均衡点で安定な均衡点  $x > 0$  が存在するかの、どちらかである。 $\phi'(0) < 1$  が成立つとき、 $x = 0$  はただ一つの安定な均衡点となる。 $\phi'(0) > 1$  のとき、 $x = 0$  が不安定な均衡点となる。初期時刻での新技術の採用比率  $x^0$  から出発して、最初はイノベーションの浸透速度は加速し、 $x = x^*$  を過ぎた時点から、イノベーションの浸透速度は緩やかとなって、均衡点に収束する。イノベーションの波及分布は S 字曲線を描く。

一般的に、 $G(k, x)$  は凹関数にならない。既に上で見た通り、 $f(k, r) = k^{\alpha+1} x$  で、 $\alpha + 1 > 0$  のとき、分布関数  $F$  に依存して凹関数にならない。上記の定理で、 $G(k, x)$  が  $x$  に関して厳密に凸関数であれば、反対の現象が起こる。下のグラフは、 $\phi(x)$  のグラフが凹関数にならないケースを表現している。

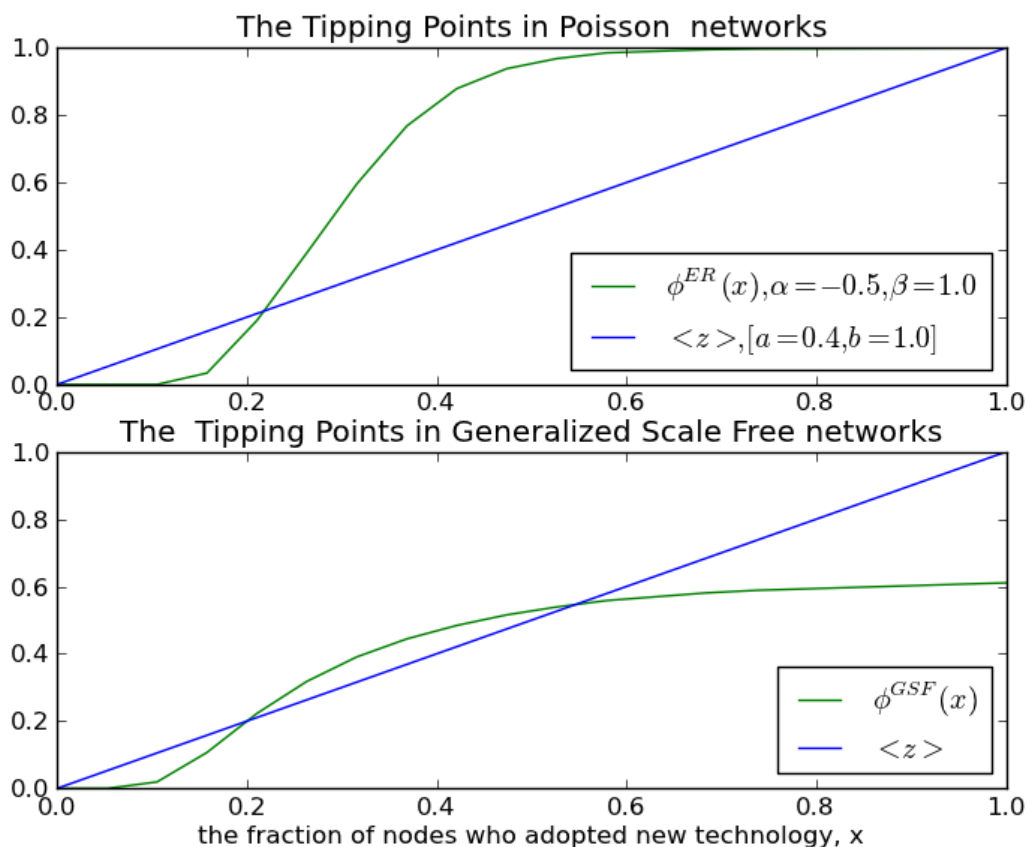


Fig.6  $\alpha + \beta > 0, \beta = 1$  の例 ( $z = 5$  のケース)

上に掲げた二つのグラフ (figures 5,6) で、平均次数は 5 で、ポアソン分布の分散は 5、拡張版スケールフリー・ネットワークの分散は非常に大きい。Figure 5 では、 $\alpha + \beta = 0, \beta = 1$  であり、ポアソン分布では、

$\phi$  のグラフは凹関数となっていない。Figure 6 は  $\alpha + \beta > 0, \beta = 1$  のケースを示したもので、二つ安定な均衡点が存在し、原点も安定な均衡となっている。これらのグラフから良く理解できる通り、平均連結度が同一であるとしても、次数分布の分散の増大がイノベーションの浸透度を上昇させるとは限らないことがわかる。

## 5 結び

イノベーションの浸透過程を理解するために、Watts(2002)、López-Pintado(2008)、および、Jackson and Rogers(2007) の研究で利用されている 3 種類のネットワーク・モデルを分析してきた。いずれのモデルにおいても、ネットワークのリンク・アーキテクチャーとイノベーションの浸透度の間にはクリアカットな関係が見出せないことが分かった。とりわけ、連結度の分散の上昇がイノベーションの浸透度を必ずしも深化させないことも確認できた。

隣人からのネットワーク効果関数が複雑になるとき、母関数アプローチは抜本的に改善される必要がある。この課題は今後の研究に委ねることとする。

## Appendix

### 確率母関数の性質

任意に選んだノードの次数の確率分布  $p_k$  の母関数 (generating function) は

$$G_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k, |x| < 1$$

と定義される。 $p_k$  が正規化された確率分布であるとする定義から  $G(1) = \sum_k p_k = 1$  である。元の確率分布は以下の手続きで復元される。

$$p_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k G_0(x)}{dx^k} \Big|_{x=0}, k = 0, 1, 2, \dots$$

平均値は

$$\langle k \rangle = \sum_k k p_k = G'_0(1)$$

と計算される。さらに、 $n$  次のモーメントは

$$\langle k^n \rangle = \sum_k k^n p_k = \left[ \left( x \frac{d}{dx} \right)^n G_0(x) \right] \Big|_{x=1}, n = 2, 3, \dots$$

となる。ちなみに、

$$\langle k^2 \rangle = \sum_k k^2 p_k = G'_0(1) + G''_0(1)$$

である。あるノードから出ているリンクの沿って到達するノードの次数分布を考える。選んだリンク以外にこのノードにリンクする隣人数の分布に対応する母関数を  $G_1(x)$  とする。このとき、

$$G_1(x) = \frac{G'_0(x)}{G'_0(1)} = \frac{1}{\langle k \rangle} G'(x)$$

という関係が成立する。最初に選んだノードの隣人の隣人数 (the average number of second neighbors) は

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k [G_1(x)]^k = G_0(G_1(x))$$

で与えられる。隣人の隣人の隣人数は  $G_0(G_1(G_1(x)))$  となる。隣人の平均隣人数  $z_2$  は

$$z_2 = \left[ \frac{d}{dx} G_0(G_1(x)) \right]_{x=1} = G_0'(1) G_1'(1) = G_0''(1)$$

である。なぜなら、 $G_1(1) = 1$  である。

## 例

### 例 5.1 (Poisson distribution)

$$p_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

ここで、パラメータ  $\lambda > 0$  は平均値となる。

$$\langle k \rangle = \lambda, \quad \text{Var}(k) = \lambda$$

各ノードの隣人分布の母関数  $G_0(x)$  は

$$G_0(x) = e^{\lambda(x-1)}$$

となる。隣人の隣人の確率母関数  $G_1(x)$  は  $G_0(x)$  に等しい。

### 例 5.2 (exponential distribution)

$$p_k = (1 - e^{-\lambda}) e^{-\lambda k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

ここで、 $\lambda$  は正のパラメータである。各ノードの次数分布の母関数 (generating function)  $G_0(x)$  は

$$G_0(x) = \frac{e^\lambda - 1}{e^\lambda - x}$$

となる。隣人の隣人数の確率母関数  $G_1(x)$  は

$$G_1(x) = \left[ \frac{e^\lambda - 1}{e^\lambda - x} \right]^2$$

### 例 5.3 (power law distribution)

$$p_k = \frac{k^{-\alpha} e^{-\lambda k}}{\text{Li}_\alpha(e^{-\lambda})}$$



ここで、 $\alpha, \lambda$  は定数で、

$$Li_{\alpha}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} x^k$$

である。各ノードの次数分布の母関数は

$$G_0(x) = \frac{Li_{\alpha}(xe^{-\lambda})}{Li_{\alpha}(e^{-\lambda})}$$

となる。 $\alpha \rightarrow 0$  のとき、つまり、単純なスケールフリー分布  $p_k = Ce^{-\alpha k}$  になるとき

$$G_0(x) = \frac{Li_{\alpha}(x)}{\zeta(\alpha)}$$

となっている。ここで、 $\zeta(\alpha)$  はリーマン・ゼータ (Rieman-zeta) 関数と呼ばれ、

$$\zeta(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}$$

隣人の次数分布の母関数  $G_1(x)$  は

$$G_1(x) = \frac{Li_{\alpha-1}(xe^{-\lambda})}{xLi_{\alpha-1}(e^{-\lambda})}$$

となる。平均次数は

$$\langle k \rangle = G'_0(0) = \frac{Li_{\alpha-1}(e^{-\lambda})}{Li_{\alpha}(e^{-\lambda})}$$

と計算される。隣人の平均次数 (the average number of second neighbors) は

$$z_2 = G''_0(1) = \frac{Li_{\alpha-2}(e^{-\lambda}) - Li_{\alpha-1}(e^{-\lambda})}{Li_{\alpha}(e^{-\lambda})}$$

となる。

Pastor-Sattoras and Vespognani(2001) は以下のような確率分布のスケールフリー・ネットワークを提案した。

$$p_k = (1 + \gamma)m^{1+\gamma}k^{-2-\gamma}, \gamma > 0, k \geq m$$

ここで、 $m$  は各ノードの最小次数であり、 $k$  を実数値として取り扱う。この場合

$$\langle k \rangle = \int_m^{\infty} kp_k dk = \frac{1 + \gamma}{\gamma} m$$

となっている。また、Jackson and Rogers(2007) はスケールフリー・ネットワークと指数分布ネットワークを両極端のケースに持つ次数分布を提案している。次数  $k$  の累積分布関数を

$$F(k) = 1 - \left(\frac{k_0 + rm}{k + rm}\right)^{1+r}, k \geq k_0$$

と定義する。ここで、 $k_0$  は最小の次数であり、 $m$  は平均次数、 $r$  は正の定数である。

## 参考文献

- [1] Arinaminpathy, Nimalan, Sujit Kapadia, and Robert M. May(2012), Size and Complexity in Model Financial Systems, *Proc. of National Academy of Science*, 109(45), 18338-18343.
- [2] Bala, Venkatesh and Sanjeev Goyal(1998), Learning from Neighbors, *Review of Economic Studies*, 65, 595-621.
- [3] Banerjee, Abhijit V. (1992), A Simple Model of Herd Behavior, *Quarterly Journal of Economics*, 107(3), 797-817.
- [4] Birkhchnadani, Sushil , David Hirshleifer and Ivo Welch(1992), A Theory of Fads, Fashion, Custom, and Cultural Change as Informational Cascades, *Journal of Political Economy*, 100(5), 992-1026
- [5] Blume, Lawrence E.(1993), The Statistical Mechanics of Strategic Interaction, *Games and Economic Behavior*, 4, 387-424.
- [6] Blume, Lawrence E. (1995), The Statistical Mechanics of Best-Response Strategy Revision, *Games and Economic Behavior*, 11, 11-145.
- [7] Callaway, Duncan S. , M. E. J. Newman, Steve H. Strogatz, and Duncan J. Watts(2000), Network Robustness and Fragility: Percolation on Random Graphs, *Physical Review Letters*, 85, 5468-5471.
- [8] Campbell, Arthur (2013), Word-of-Mouth Communication and Percolation in Social Networks, *American Economic Review*, 103(6), 2466-2498.
- [9] Dodds, Peter Sheridan and Duncan Watts(2004), Universal Behavior in a Generalizad Model of Contagion, *Physical Review Letters*, 82(21), 218701.
- [10] Dodds, Peter Sheridan and Duncan Watts(2005), A Generalized Model of Social and Biological Contagion, *Journal of Theoretical Biology*, 232, 587-604.
- [11] Easley, David and Jon Kleinberg(2010), *Networks, Crowds, and Markets: Reasoning about a Highly Connected World*, Cambridge University Press.
- [12] Ellison, Glenn (1993), Learning, Local Interaction, and Coordination, *Econometrica*, 61(5), 1047-1071.
- [13] Gai, Prasanna and Sujit Kapadia(2010), Contagion in Financial Networks, *Proceedings of the Royal Society A*, 466(2110), 2401-2423.
- [14] Gai, Prasanna, Andrew G. Haldane, and Sujit Kapadia(2011), Complexity Concentration and Contagion, *Journal of Monetary Economics*, 58, 453-470
- [15] Gale, Douglas and Shachar Kariv(2003), Bayesian Learning in Social Networks, *Games and Economic Behavior*, 45, 329-346.
- [16] Galeotti, Andrea and Sanjeev Goyal(2009), Influencing the Influencers: a Theory of Strategic Diffusion, *RAND Journal of Economics*, 40(3), 509-532.
- [17] Granovetter, Mark (1978), Threshold Models of Collective Behavior, *American Journal of Sociology*, 83, 1420-1443.
- [18] Haldane, Andrew G. and Robert M. May(2011), Systemic Risk in Banaking Ecosystems, *Nature*, 469, 351-355.

- [19] Immorlica, Nicole , John Kleinberg, Mohammad Mahdian and Tom Wxler(2007), Maximizing the Speed of Influence through a Social Network, *Proc. 9th ACM SIGKDD Intl. Conference*.
- [20] Jackson, Matthew O. and Leeat Yariv(2005), Diffusion on Social Networks, *Économie Publique*, 16, 3-16.
- [21] Jackson, Matthew O. and Brian W. Rogers(2007), Relating Network Structure to Diffusion Properties through Stochastic Dominance, *Advances in Theoretical Economics*, 7, 1-13.
- [22] Jackson, Matthew O. and Leeat Yariv(2007), Diffusion of Behavior and Equilibrium Properties in Network Games, *American Economic Review*, 97(2), 92-98.
- [23] Kandori, Michihiro , George Mailath and Rafael Rob(1993), Learning, Mutation, and Long-Run Equilibrium in Games, *Econometrica*, 61, 29-56.
- [24] Kleinberg, Jon(2007), Cascading Behavior in Networks: Algorithmic and Economic Issues, Chapt.24 of *Algorithmic Game Theory*, Cambridge University Press.
- [25] López-Pintado, Dunia(2006), Contagion and Coordination in Random Networks, *Int. J. Game Theory*, 34, 371-381.
- [26] López-Pintado, Dunia(2008), Diffusion in Complex Social Networks, *Games and Economic Behavior*, 62, 573-590.
- [27] May, Robert M. and Nimalan Arinaminpathy(2010), Systemic Risk: the Dynamics of Model Banking Systems, *Jouranal of the Royal Society Interface*, 7, 823-838.
- [28] Montanari, Andrea and Amin Saberi(2010), The Speed of Innovations in Social Networks, *Proc. of National Academy of Science*, 107(47), 20196-20201.
- [29] Morris, Stephen(2000), Contagion, *Review of Economic Studies*, 67, 57-78.
- [30] Newman, M. E. J.(2002), The Spread of Epidemic Disease on Networks, *Physical Review E*, 66, 016128.
- [31] Newman, M. E. J. , Steven H. Strogatz, and Duncan J. Watts(2001), Random Graph with Arbitrary Distributions and their Applications, *Physical Review E*,64, 7332-7342.
- [32] Nier, Elrend, Jing Yang, Tanju Yorulmazer and Amdeo Alentorn(2007), Network Models and Financial Stability, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 31, 2033-2060.
- [33] Pastor-Satorras, Romuald and Alessandro Vespignani(2001), Epidemic Spreading in Scale-Free Networks, *Physical Review Letters*, 86, 3200.
- [34] Schelling, Thomas C. (1978), *Micro Motives and Macro Behavior*, Norton.
- [35] Ugander, Johan, Lars Backstrom, Cameron Marlow, and Jon Kleinberg(2012), Structural Divesity in Social Contagion, *Proc. National Academy of Science, PNAS Early Edition*.
- [36] Vega-Redondo, Fernando(2007), *Complex Social Networks*, Cambridge University Press.
- [37] Watts, Duncan J. (2002), A Simple Model of Global Cascades on Random Networks, *Proc. of National Academy of Science*, 99(9), 5766-5771.
- [38] Young, H. Peyton(1993), The Evolution of Conventions, *Econometrica*, 61(1), 57-84.
- [39] Young, H. Peyton(1998), *Individual strategy and Social Structure*, Princeton University Press.
- [40] Young, H. Peyton(2002), The Diffusion of Innovations in Social Networks, Santa Fe Institute Working Paper 02-04-018.

- [41] Young, H. Peyton(2009), *Innovation Diffusion in Heterogeneous Populations: Contagion, Social Influence, and Social Learning*, *American Economic Review*, 99(5), 1899-1924.
- [42] Young, H. Peyton(2011), *The Dynamics of Social Innovations*, *Proc. of National Academy of Science*, 108(s4), 21285-21291.
- [43] 増山 幸一 (2007)、「経済現象の確率動学モデル」、研究所年報、明治学院大学産業経済研究所.
- [44] 増山 幸一 (2013)、「ネットワークゲームと経済ネットワークの社会的効率性」、*Discussion Paper No.13-04*、明治学院大学産業経済研究所.